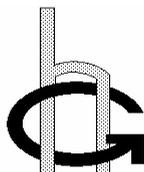


**Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Сибирский федеральный университет»**

Институт инженерной физики и радиоэлектроники

Кафедра теоретической физики



**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА:
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА.
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД**

**Учебное пособие
по курсу «Электродинамика и основы электродинамики сплошных сред»**

Красноярск 2008

УДК 530/537

А.М.Баранов, С.Г.Овчинников, О.А.Золотов, Н.Н.Паклин, Л.С.Титов.
Теоретическая физика: Электродинамика. Электродинамика сплошных сред.
Учебное пособие по курсу «Электродинамика и основы электродинамики
сплошных сред» // СФУ, Красноярск, 2008. – 198 с.

Учебное пособие «Теоретическая физика: Электродинамика. Электро-
динамика сплошных сред» по дисциплине «Электродинамика и основы элек-
тродинамики сплошных сред» предназначено для студентов 3-го курса физи-
ческих специальностей университетов и посвящено изложению основных
принципов теории электромагнитного поля в вакууме и сплошных средах.
Каждая глава снабжена контрольными вопросами для самопроверки.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Сибирского
федерального университета

© Сибирский федеральный университет, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теоретическая физика: Электродинамика. Электродинамика сплошных сред» является второй из курсов теоретической физики, обязательной университетской программы по теоретической физике для направления «Физика» и специальности «Физика» (после дисциплины «Теоретическая физика. Механика») университетов.

Соответствующий курс «Электродинамика и основы электродинамики сплошных сред» имеет значение с общетеоретической точки зрения как пример калибровочной теории, которая может обобщаться на другие физические явления микромира и макромира, и также для более глубокого и детального по сравнению с курсом «Электричество и магнетизм» из общей физики ознакомления со свойствами электромагнитных полей и заряженных частиц как в вакууме, так и в сплошных средах.

С другой стороны, курс «Электродинамика и основы электродинамики сплошных сред» является примером применения классической полевой теории электромагнитного поля. Такого рода классический полевых теорий на данный момент существует две: электромагнитная (теория Максвелла) и гравитационная (теория Эйнштейна). Поэтому необходимо, чтобы студенты-физики на примере электромагнитной теории овладели основными понятиями, навыками и умениями работать с классической полевой теорией.

В области обучения целью преподавания дисциплины по направлению подготовки 010700 Физика является изучение теории электромагнитного поля в вакууме и сплошных средах, формирование базовых общепрофессиональных знаний о теоретических основах, базовых понятиях, законах электродинамики и моделях электродинамических систем, теории генерации и распространения электромагнитного излучения, необходимых в последующих курсах: теории относительности, квантовой механики, термодинамики и статистической физики, а также квантовой теории поля и квантовой теории твердого тела. Кроме того, в курсе «Электродинамика и основы электродинамики сплошных сред» закладываются основы владения основными методами теоретической физики (в приложениях к электростатике и магнитостатике), необходимыми при изучении дальнейших курсов теоретической физики: квантовой механики, термодинамики и статистической физики, квантовой теории магнетизма и твердого тела.

Основной задачей дисциплины "Теоретическая физика: Электродинамика. Электродинамика сплошных сред" является обучение овладению идеями и методами полевого подхода к описанию физических явлений с участием электромагнитных взаимодействий с тем, чтобы эти методы могли быть легко перенесены в дальнейшем и на другие разделы теории поля в теоретической физики. При этом студенты должны знать, откуда и как возникли эти методы,

когда и где можно их применять. Они должны также знать и уметь решать типовые задачи, пользуясь различными подходами для решения уравнений Максвелла в вакууме и сплошных средах.

К концу изучения курса студент должен овладеть следующими компетенциями:

1. Универсальными общенаучными компетенциями (ОНК):

ОНК-1. Готовность использовать полученные знания, навыки и умения при дальнейшем изучении курсов теоретической физики – квантовой механики, термодинамики и статистической физики, специальных дисциплин специализаций «Теоретическая физика», «Физика твердого тела», «Физика магнитных явлений», «Радиофизика», применять методы высшей математики и моделирования, теоретического исследования в физике и технике;

ОНК-2. Способность активно и целенаправленно применять полученные знания, навыки и умения для выбора тематики выполнения индивидуальной научно-исследовательской работы и курсовых работ;

2. Инструментальными компетенциями (ИК):

ИК-1. Активное владение пользовательскими навыками для применения компьютерных пакетов для аналитических и численных вычислений при решении ряда электродинамических задач;

ИК-2. Готовность работать с информацией в области теоретической физики из различных источников: отечественной и зарубежной научной периодической литературы, монографий и учебников, электронных ресурсов Интернет;

3. Профессиональными компетенциями (ПК):

ПК-1. Готовность использовать основные методы теоретической физики в последующей профессиональной деятельности в качестве научных сотрудников, преподавателей вузов, инженеров;

ПК-2 Готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности в областях теоретической физики: механики, теории относительности, электродинамики, квантовой механики, статистической физики.

ПК-3. Способность понимать, излагать и критически анализировать физическую информацию.

ПК-4. К концу изучения курса «Электродинамика и основы электродинамики сплошных сред» от студента требуется:

- а). Знание и понимание физического смысла уравнений Максвелла.
- б). Умение вычислять векторные функции с дифференциальным оператором Гамильтона.
- в). Умение решать простейшие задачи о движении заряженной частицы в статических электромагнитных полях.

- г). Знание основных видов решений для электромагнитного поля – статическое, волны, излучение.
- д). При изучении сплошных сред необходимо понимание причины различия напряженности и индукции.
- е). Знать особенности прохождения волн в диспергирующих средах.
- ж). Иметь понятие о волноводах и резонаторах.
- з). Понимать различия между диамагнетизмом и парамагнетизмом.
- и). Иметь основные понятия о теории ферромагнетизма, доменной структуре.
- к). Иметь элементарные знания о сверхпроводимости как низко температурной, так и высоко температурной.

Для изучения дисциплины «Теоретическая физика: Электродинамика. Электродинамика сплошных сред» необходимо предварительное усвоение курса «Электричество и магнетизм», «Теоретическая физика. Механика», основных разделов «Математического анализа» – дифференциальное и интегральное исчисление, «Дифференциальных уравнений», «Линейной алгебры и аналитической геометрии», основ «Информатики».

Дисциплина «Теоретическая физика: Электродинамика. Электродинамика сплошных сред» является базовым при изучении последующих курсов теоретической физики: квантовой механики, термодинамики и статистической физики, квантовой теории поля и теории гравитационного поля (общей теории относительности) и ряда специальных курсов по различным разделам физики, в том числе спецкурсов: «Основы общей теории относительности», «Квантовая теория магнетизма».

ЧАСТЬ I. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ВАКУУМЕ

Глава 1. Электрический заряд и электромагнитное поле

1.1. Понятие силового поля и пробного заряда

Из повседневного опыта хорошо известно, что любое физическое тело, помещенное над поверхностью Земли и предоставленное самому себе (т.е. не удерживаемое ни веревкой, ни подставкой) начинает двигаться вертикально вниз (падать) и через некоторое время достигает поверхности Земли. Какие силы заставляют тело двигаться? Как видно из описанного эксперимента ни Земля, ни наше тело не взаимодействовали друг с другом через непосредственное взаимодействие (соприкосновение). Взаимодействие происходило на расстоянии, через третье «тело» – поле. Другими словами, вокруг каждого из рассматриваемых тел существует силовое поле, через которое они и влияют друг на друга (изменяют состояние движения друг друга на расстоянии). Данное силовое поле называется гравитационным, а силы – силами гравитационного притяжения, связанными с существованием гравитационного поля вокруг Земли и рассматриваемого тела. Как Земля, так и взятое нами тело обладают одной характеристикой (параметром) – гравитационной массой, определяющей величину силы взаимодействия между телами. Так как масса Земли M несравненно больше массы взятого нами тела (т.е. инертность Земли очень велика), то и силовое поле, создаваемое ею, несравненно более интенсивно, т.е. обладает значительной напряженностью по сравнению с напряженностью тела массы m .

Следовательно, напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения) для Земли равно $g_3 = G_N M / R^2$, а для тела будет $g_T = G_N m / R^2$. Поэтому их отношение $g_T / g_3 = m / M \approx 0$ из-за ничтожной величины массы тела по сравнению с массой Земли.

Отсюда можно сделать вывод, что влияние силового поля Земли на тело настолько велико, что обратным влиянием силового поля тела на гравитационное поле Земли можно пренебречь, несмотря на то, что по третьему закону динамики (3-му закону Ньютона) сила притяжения тела к Земле равна силе притяжения Земли к телу. Это означает, с другой стороны, что общее (результатирующее) поле системы Земля-тело практически определяется силовым полем Земли.

Приведенный здесь пример убеждает нас, что при рассмотрении ряда физических явлений можно пользоваться как понятием силового поля, так и

пробного тела, т.е. физического тела, которое взаимодействует со внешним силовым полем, но само не оказывает влияния на это поле. Понятие пробного тела, естественно, является в определенной степени абстракцией с физической точки зрения, но введения такого понятия значительно облегчает и упрощает описание физических явлений.

Необходимо еще заметить следующее. Масса, проявляющаяся в гравитационном взаимодействии, может рассматриваться как **гравитационный заряд**, а, значит, можно ввести понятие **пробного гравитационного заряда**. Все эти выводы для гравитационного поля получены на основании опытных фактов.

Однако есть еще один аспект, связанный с понятием пробной частицы и размеров такой частицы. Согласно специальной теории относительности (СТО) сигналы не могут распространяться в любой материальной среде быстрее скорости света в этой среде. Это означает невозможности существования абсолютно твердых тел. С другой стороны мы видели, что понятие пробной частицы связано с малыми размерами тела, т.к. как правило, такие малые тела имеют и малую массу, т.е. малый гравитационный заряд. Совмещение понятий малого по объему пробного тела и отсутствия деформаций приводит к понятию точечного пробного тела. Пробная частица должна быть, строго говоря, точечной. Однако в реальности это означает очень малые размеры частицы, так что ее можно в классической физике (т.е. без учета квантовых эффектов) принять за точечную.

В электромагнетизме на основании ряда опытных фактов можно заключить, что свойства частицы по отношению к взаимодействию с электромагнитным полем также определяются одним параметром, который называют **электрическим зарядом** частицы. При этом, в отличие от гравитационного заряда электрический заряд может быть двух знаков: положительным и отрицательным. Электронейтральные частицы имеют нулевой заряд.

Аналогично рассмотренному выше примеру с гравитационным полем можно ввести и понятие **пробного электрического заряда**, поле которого не влияет на поле внешнего электромагнитного поля, создаваемого системой зарядов, с которой он взаимодействует. Однако при определении пробной заряженной частицы необходимо учитывать, что заряд сам по себе не существует, а связан с некоторой частицей, обладающей массой. Поэтому понятие пробной частицы в электромагнетизме оказывается связанным как с точечностью частицы (малыми размерами), так и малостью электрического заряда.

1.2. Действие для заряда в электромагнитном поле и четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля

Одной из основных проблем, связанной с описанием движения пробной заряженной частицы, оказывается нахождение уравнений движения. Однако те знания, которые позволяли в классической механике довольно просто по-

лучить уравнения Лагранжа (уравнения движения) исходя из записи лагранжиана как разности кинетической T и потенциальной U энергий

$$L = T - U, \quad (1.1)$$

здесь не применимы хотя бы из-за того, что электродинамика — это релятивистская теория, в которой необходимо заново построить и лагранжиан, и взаимодействие поля с зарядом.

Перейдем к построению действия для частицы, движущейся в электромагнитном поле. Прежде всего запишем известное из СТО действие для свободной нейтральной частицы массы m , движущейся со скоростью \vec{v} (при этом $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, c — скорость света)

$$S = - \int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (1.2)$$

где соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.3)$$

а параметр α записывается как $\alpha = mc^2$.

Вариационная задача с закрепленными концами для действия (1.2) приводит к уравнению движения свободной нейтральной частицы, как и должно быть (ускорение равно нулю).

Запись действия можно трансформировать для четырехмерия, введя 4-интервал в виде, например, в «декартовых» координатах,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (1.4)$$

где $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор пространства-времени Минковского.

В этом случае действие для свободной частицы, движущейся между точками 1 и 2 четырехмерного пространства-времени, переписывается как

$$S = -mc \int_1^2 ds. \quad (1.5)$$

Если же кроме массы у частицы появляется еще один параметр, электрический заряд q , а сама заряженная частица помещается в электромагнитное поле, то необходимо внести изменения в запись действия и функции Лагранжа. Здесь опять необходимо вернуться к классической механике, где при переходе от движения свободной частицы к движению частицы в силовом поле, например гравитационном, в лагранжиане появляется потенциальная функция U , а в действии – слагаемое пропорциональное произведению Udt . С другой стороны, в электродинамике со скалярным потенциалом связана напряженность электрического поля,

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Однако кроме электрического поля существует еще и магнитное, которое является вихревым и поэтому выражается с помощью оператора rot , учитывающего особый характер магнитного поля, как

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A},$$

где \vec{A} – вектор-потенциал магнитного поля.

Кроме того, в рамках четырехмерного формализма дифференциальная форма Udt может быть записана в виде (с точностью до постоянной, равной скорости света c)

$$A_0 dx^0,$$

где $A_0 \equiv \varphi$ – потенциал электрического поля (потенциальная энергия $U = q\varphi$), фактически представляющий собой компоненту четырехмерного вектора A_μ , называемого 4-потенциалом электромагнитного поля (греческие индексы пробегают значения 0,1,2,3).

Учитывая приведенные замечания, обобщим записи действия (1.2) и (1.5), добавив в подынтегральное выражение слагаемое (с учетом размерности)

$$-\frac{q}{c} A_\mu dx^\mu, \tag{1.5.a}$$

где $A_\mu = (\varphi, \vec{A})$ – 4-потенциал, φ – скалярный потенциал поля, а \vec{A} – векторный потенциал.

В итоге действие (1.5) принимает вид

$$S = \int_1^2 \left(-mc ds - \frac{q}{c} A_\mu dx^\mu \right) \quad (1.6)$$

или

$$S = \int_1^2 \left(-mc - \frac{q}{c} A_\mu u^\mu \right) ds, \quad (1.7)$$

где $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(1, \frac{\vec{v}}{c} \right) / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ — 4-скорость.

В трехмерных обозначениях действие примет вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \vec{v} \right) dt. \quad (1.8)$$

Откуда сразу получается соответствующая функция Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \vec{v}. \quad (1.9)$$

Сравнение с записью (1.3) показывает, что член, описывающий взаимодействие электрического заряда с электромагнитным полем описывается выражением

$$L_{\text{int}} = -\frac{q}{c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} A_\mu u^\mu = -q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \vec{v}. \quad (1.10)$$

Согласно общему алгоритму лагранжева формализма в данном случае можно найти обобщенный импульс

$$\vec{P} = \partial L / \partial \vec{v}$$

помощью функции Лагранжа (1.9)

$$\vec{P} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} + \vec{P}_f, \quad (1.11)$$

где теперь введем импульс частицы $\vec{p} = m\vec{v} / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ (или просто импульс) и импульса поля $\vec{P}_f = e\vec{A} / c$.

Электродинамика – релятивистская теория, поэтому необходимо упомянуть о преобразованиях Лоренца и преобразовании относительно них компонент 4-потенциала A_μ .

При движении двух инерциальных систем отсчета K и K' , у одной из которых ось абсцисс скользит по другой (например, у системы K'), т.е. относительная скорость между этими ИСО направлена вдоль этих осей $\vec{V} = (V, 0, 0)$, справедливы специальные преобразования Лоренца, осуществляющие преобразование временной и пространственных координат из одной ИСО в другую,

$$t' = \frac{t - x \cdot V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \quad (1.12.a)$$

$$x' = \frac{x - t \cdot V}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}; \quad (1.12.b)$$

$$y' = y; \quad z' = z. \quad (1.12.c)$$

Введем стандартное обозначение для следующей дроби, часто используемой в релятивистских теориях,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \quad (1.13)$$

Применим теперь эти преобразования к 4-потенциалу A_μ , введя матрицу Лоренца,

$$A'^\alpha = L^\alpha_\beta A^\beta, \quad (1.14)$$

где матрица Лоренца записывается как

$$(L^{\alpha}_{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

где $\beta \equiv V/c$.

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1), \quad A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0), \quad A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3.$$

1.3. Уравнения движения точечного заряда в электромагнитном поле

Выше уже было указано, при каких условиях заряд можно считать пробным, чтобы можно было применить к найденному лагранжиану (1.10) стандартный лагранжев формализм, т.е., в первую очередь, записать уравнения Лагранжа и подставить в них (1.10)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0. \quad (1.15)$$

Эти уравнения получаются из вариационной задачи с закрепленными концами на минимум действия (принцип наименьшего действия)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

В нашем случае уравнения движения электрического заряда в электромагнитном поле запишутся как

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = -\frac{q}{c} \vec{A} - q \nabla \varphi + \frac{q}{c} [\vec{v}, \text{rot } \vec{A}] = q \vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{H}], \quad (1.16)$$

где введена напряженность электрического поля

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.17)$$

и напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} . \quad (1.18)$$

Здесь уместно еще найти полную энергию заряда в электромагнитном поле, используя стандартный лагранжев подход:

$$E = \vec{v} \cdot \partial L / \partial \vec{v} - L \quad (1.19)$$

или

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\phi . \quad (1.20)$$

С помощью стандартной процедуры можно, исходя из лагранжиана, отвечающего движению заряженной частицы в электромагнитном поле, построить функцию Гамильтона. Однако, обращая внимание на соотношения (1.11) и (1.20), которые при отсутствии электромагнитного поля (4-потенциал равен нулю) позволяют записать гамильтониан свободной релятивистской частицы как

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} , \quad (1.21)$$

так как энергия (1.20) с $\phi = 0$, выраженная через импульс и есть функция Гамильтона.

Теперь нетрудно обобщить (1.21) на случай наличия электромагнитного поля, используя (1.11) и (1.20)

$$((H - q\phi) / c)^2 = m^2 c^2 + (\vec{P} - q\vec{A} / c)^2 .$$

Отсюда находим гамильтониан заряженной частицы в электромагнитном поле

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{P} - q\vec{A} / c)^2} + q\phi \quad (1.22)$$

Если теперь для функции (1.22) составить уравнения Гамильтона, то это будут уравнения движения заряженной частицы, находящейся в поле.

Уравнения движения также можно получить с помощью формализма Гамильтона-Якоби.

Для этого определим 4-импульс p_α для свободной частицы как 4-градиент от действия, взятой как функция верхнего предела

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha},$$

и сконструируем инвариант из квадрата этого 4-импульса

$$p_\alpha p^\alpha = g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = m^2 c^2,$$

который при записи в явном виде примет вид релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2 c^2 = 0 \quad (1.23)$$

При этом гамильтониан равен со знаком минус производной действия по времени ($H = -\frac{\partial S}{\partial t}$).

Процедура обобщение на случай электромагнитного поля нам уже известна как сдвиг в уравнении (1.23) градиента и производной по времени на электромагнитные потенциалы с коэффициентами, учитывающими размерность. В результате приходим к релятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} - \frac{q}{c} \vec{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + q\varphi\right)^2 + m^2 c^2 = 0 \quad (1.24)$$

Следуя методу Гамильтона-Якоби, с помощью (1.24) можно получить закон движения заряженной частицы в поле.

1.4. Калибровочная или градиентная инвариантность электромагнитного поля

В лагранжевом формализме большую роль играют свойства симметрии действия или функции Лагранжа. В частности, замена

$$L \rightarrow L + df / dt$$

не меняет уравнений Лагранжа.

В связи с этим интересно было бы выяснить вопрос об однозначности определения потенциалов в электродинамике, т.к. в уравнения движения входят напряженности электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} , а не потенциалы, т.е. для разных потенциалов напряженности могут быть одними и теми же. Другими словами, необходимо выяснить как могут преобразовываться потенциалы не меняя напряженностей электромагнитного поля.

Принимая во внимание дифференциальную структуру \vec{E} и \vec{H} , задаваемую формулами (1.17) и (1.18), можно ввести градиентный сдвиг для четырехмерного вектор-потенциала

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial f / \partial x^\mu, \quad (1.25)$$

при котором напряженности электрического и магнитного полей не будут меняться. При этом, естественно, уравнения движения оказываются ковариантными (не меняющими свою форму записи).

Это и есть калибровочная инвариантность полей или уравнения движения относительно калибровочных преобразований (1.25). В трехмерном виде эти преобразования записываются как

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla f, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Нетрудно непосредственной подстановкой убедиться, что электрическое и магнитное поля действительно не изменяются при таких сдвигах потенциалов, т.к. операция ротора в определении напряженности магнитного поля, примененная к градиенту, дает тождественный нуль, а в выражении для напряженности электрического поля просто происходит тождественное добавление нуля при таких преобразованиях.

Следовательно, преобразования (1.25) и (1.26) электромагнитных потенциалов не изменяют самого поля, а потенциалы определяются неоднозначно: скалярный потенциал определен с точностью до аддитивного члена (со знаком минус), являющегося частной производной по времени от произвольной функции и векторный потенциал — с точностью до аддитивного градиента от той же самой функции.

Это означает, что к скалярному потенциалу можно добавлять произвольную постоянную, а к векторному потенциалу — любой постоянный вектор. Такой произвол позволяет подобрать так функцию f , чтобы скалярный потенциал φ был равен нулю, что невозможно сделать подбором одной функции для векторного потенциала ввиду его векторного характера.

1.5. Постоянное электромагнитное поле

К постоянным электромагнитным полям относятся поля, не зависящие от времени. В этом случае ясно, что потенциалы электромагнитного поля могут быть выбраны зависящими только от пространственных координат, т.е.

$\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = 0$. Это означает, что постоянное электрическое поле примет вид

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (1.27)$$

а постоянное магнитное поле свой вид не изменит

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (1.28)$$

Следовательно, постоянные электрическое и магнитное поля определяются каждое только «своими» потенциалами. Однако выбор потенциалов не однозначен и по-прежнему векторный потенциал определен с точностью до аддитивного градиента произвольной функции. Что касается потенциала электрического поля, то однозначности можно достигнуть путем выбора его равным нулю на бесконечности.

Кроме условия постоянства можно наложить еще требование однородности поля.

Силовое поле называется однородным, если во всех точках пространства напряженность поля одинакова. В частности, для однородного электрического поля скалярный потенциал может быть выражен через напряженность электрического поля как

$$\varphi = -(\vec{E}, \vec{r}). \quad (1.29)$$

Однородное же магнитное поле обладает вектор-потенциалом

$$\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{H}, \vec{r}]. \quad (1.30)$$

При выборе компонент вектор-потенциала в виде

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0, \quad (1.31)$$

где ось z выбрана вдоль вектора напряженности магнитного поля \vec{H} ,

мы также имеем однородное магнитное поле. При этом записи (1.30) и (1.31) отличаются на слагаемое, равное градиенту функции $f = -xyH/2$ ([1]).

Существует еще одна запись однородного магнитного поля через градиент скалярного магнитного потенциала ψ

$$\vec{H} = -\text{grad} \psi. \quad (1.32)$$

Необходимо отметить, что при обобщении теории электромагнетизма на пятимерное плоское пространство Калуцы интерпретацию магнитного потенциала ψ можно связать с пятой компонентой 5-потенциала $A_5 \equiv \psi$ (см. [22]).

1.6. Движение в постоянных электрическом и магнитном полях

Рассмотрим движение электрического заряда q в плоскости xu , при этом ось x направим вдоль вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = (E, 0, 0)$ (см, например [1]). В этом случае уравнения движения (1.16) запишутся как

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0. \quad (1.33)$$

Выбирая, что в начальный момент импульс вдоль оси x равен нулю, а вдоль оси y равен p_0 , сразу получаем

$$p_x = qEt, \quad p_y = p_0. \quad (1.34)$$

Подставляя в кинетическую энергию

$$E_{\text{кин.}} = E_{\text{полн.}} - q\varphi = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$$

выражения (1.34) и, вводя для начального момента времени исходную энергию E_0 , находим

$$E_{\text{кин.}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2 + (cqEt)^2} = \sqrt{E_0 + (cqEt)^2}. \quad (1.35)$$

Используя связь $\vec{v} = \vec{p} c^2 / E_{кин.}$, для x -компоненты скорости можем записать уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 qEt}{\sqrt{E_0 + (cqEt)^2}},$$

решение которого легко находится и равно

$$x = \frac{1}{qE} \sqrt{E_0 + (cqEt)^2}, \quad (1.36)$$

полагая, что движение начинается из начала координат.

Аналогичным образом записывает скорость вдоль оси y

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{E_0 + (cqEt)^2}}$$

и, решая полученное уравнение, получаем

$$y = \frac{p_0 c}{qE} \operatorname{Arsh}\left(\frac{cqEt}{E_0}\right). \quad (1.37)$$

Исключая из (1.36) и (1.37) время, находим уравнение траектории

$$x = \frac{E_0}{qE} \operatorname{Arsh}\left(\frac{qEy}{p_0 c}\right), \quad (1.37)$$

которое оказывается уравнение цепной линии.

В приближении медленного движения (скорость частицы много меньше скорости света, $p_0 = mv_0$, $E_0 = mc^2$), разлагая в ряд по степеням $1/c$ выражение (1.37), уравнение цепной линии сводится уравнению параболы, по которой и движется заряженная частица в классике,

$$x = \frac{E_0}{2mv^2} y^2 + const.$$

При рассмотрении движения электрического заряда в однородном магнитном поле направим ось z по магнитному полю \vec{H} , т.е. $\vec{H} = (0, 0, H)$. Уравнение движения

$$\frac{dp}{dt} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{H}]$$

в этом случае перепишем с учетом соотношения $\vec{p} = E \vec{v} / c^2$, где теперь E – энергия, которая постоянна в магнитном поле. Уравнения движения принимают вид

$$\frac{E}{c^2} \frac{dv}{dt} = \frac{q}{c} [\vec{v}, \vec{H}]. \quad (1.38)$$

Расписывая по компонентам (1.38) и вводя вспомогательную комплексную переменную $Z = v_x + i v_y$, сведем два уравнения системы (1.38) к одному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dZ}{dt} = -i \omega Z, \quad (1.39)$$

где $\omega = qcH / E$, $i^2 = -1$.

Интегрируя (1.39), отделяя мнимую и вещественную части решения, получим

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.40)$$

где постоянные v_0 α определяются из начальных условий и $v_0^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Путем интегрирования из (1.6.9) получаем закон движения в плоскости xu

$$x(t) = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), \quad y(t) = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha), \quad (1.41)$$

где

$$r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0 E}{qcH}. \quad (1.42)$$

Из оставшегося третьего уравнения системы (1.38) находим закон движения вдоль оси z

$$z(t) = z_0 + v_{0z} t. \quad (1.43)$$

Таким образом, в однородном магнитном поле электрический заряд движется по винтовой линии, навиваясь на ось z с радиусом r , согласно (1.42) и циклической частотой ω . Скорость частицы постоянна при движении. В отсутствии начальной z составляющей скорости получим движение просто по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению поля.

В приближении медленных движений (по сравнению со скоростью света, когда $E \approx mc^2$) частота ω записывается как

$$\omega = \frac{qH}{mc}.$$

1.7. Дуальное сопряжение и 4-мерный символ Леви-Чивиты

При пространственных отражениях важную роль играет символ Леви-Чивиты $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — единичный полностью антисимметричный тензор (только в плоском пространстве): $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma\delta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\delta\gamma}$, из которого можно выделить

$$\varepsilon^{0ijk} = \varepsilon^{ijk}; \quad \varepsilon^{0123} = 1, \quad (1.44)$$

где ε^{ijk} — единичный антисимметричный тензор в трехмерном евклидовом пространстве, так же называемый символом Леви-Чивиты (латинские индексы пробегают три значения: 1,2,3). Величина ε^{ijk} равна: +1, если индексы ijk образуют упорядоченный набор 123 или четную подстановку к нему; и ε^{ijk} равен -1 , если нечетную подстановку к упорядоченному набору; 0, если два или три индекса совпадают. Выпишем для справок свойства 3-мерного символа Леви-Чивиты, играющие важную роль как в классической механике, так и в других разделах теоретической физики:

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{prs} = \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_p^j & \delta_r^j & \delta_s^j \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k \end{vmatrix}; \quad \begin{aligned} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{prk} &= \delta_p^i \delta_r^j - \delta_r^i \delta_p^j; \\ \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{pjk} &= 2 \delta_p^i; \\ \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} &= 6, \end{aligned}$$

а так же аналогичные свойства 4-мерного символа Леви-Чивиты:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = - \begin{vmatrix} \delta_{\mu}^{\alpha} & \delta_{\nu}^{\alpha} & \delta_{\lambda}^{\alpha} & \delta_{\delta}^{\alpha} \\ \delta_{\mu}^{\beta} & \delta_{\nu}^{\beta} & \delta_{\lambda}^{\beta} & \delta_{\delta}^{\beta} \\ \delta_{\mu}^{\gamma} & \delta_{\nu}^{\gamma} & \delta_{\lambda}^{\gamma} & \delta_{\delta}^{\gamma} \\ \delta_{\mu}^{\delta} & \delta_{\nu}^{\delta} & \delta_{\lambda}^{\delta} & \delta_{\delta}^{\delta} \end{vmatrix}; \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta} = - \begin{vmatrix} \delta_{\mu}^{\alpha} & \delta_{\nu}^{\alpha} & \delta_{\lambda}^{\alpha} \\ \delta_{\mu}^{\beta} & \delta_{\nu}^{\beta} & \delta_{\lambda}^{\beta} \\ \delta_{\mu}^{\gamma} & \delta_{\nu}^{\gamma} & \delta_{\lambda}^{\gamma} \end{vmatrix};$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = -2(\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\alpha}\delta_{\mu}^{\beta}); \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\beta\gamma\delta} = -6\delta_{\mu}^{\alpha}; \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24.$$

Валентность (ранг) символа Леви-Чивиты равна размерности пространства (пространства-времени). Свертка с ним называется дуальным сопряжением. В частности дуальное сопряжение антисимметричного тензора $A_{\alpha\beta}$ ($A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$)

$$A_{\alpha\beta}^* = (1/2)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}A^{\gamma\delta}. \quad (1.45)$$

Дуальное сопряжение применяется к скаляру, вектору, антисимметричному тензору валентности ≤ 4 . При этом соблюдается правило:

тензор \otimes тензор = тензор;
 тензор \otimes псевдотензор = псевдотензор;
 псевдотензор \otimes псевдотензор = тензор.

Примеры:

если φ — скаляр, то $\varphi_{ijkl}^* = \varepsilon_{ijkl}\varphi$ — псевдотензор;
 если φ^l — вектор, то $\varphi_{ijk}^* = \varepsilon_{ijkl}\varphi^l$ — псевдотензор;
 если φ^{kl} — тензор, то $\varphi_{ij}^* = \varepsilon_{ijkl}\varphi^{kl}/2$ — псевдотензор;
 если φ^{jkl} — тензор, то $\varphi_i^* = \varepsilon_{ijkl}\varphi^{jkl}/3!$ — псевдовектор;
 если φ^{ijkl} — тензор, то $\varphi^* = \varepsilon_{ijkl}\varphi^{ijkl}/4!$ — псевдоскаляр.

Здесь дуальное сопряжение обозначено знаком $*$.

Пример. Свертка антисимметричного тензора валентности два с его дуальным сопряжением: $A^{ik}A_{ik}^*$ — псевдоскаляр.

Еще один важный пример, объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на линейно не зависимых векторах $a^{\alpha}, b^{\alpha}, c^{\alpha}, d^{\alpha}$:

$$\Omega(a, b, c, d) = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta = \begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 \\ c^0 & c^1 & c^2 & c^3 \\ d^0 & d^1 & d^2 & d^3 \end{vmatrix}. \quad (1.46)$$

Фактически дуальное сопряжение можно рассматривать как некоторый поворот в дуальном пространстве, аналогичный повороту в комплексной плоскости.

1.8 Ковариантная форма уравнений движения

Вариационная задача $\delta S = 0$ с закрепленными концами для действия в 4-мерной форме (1.6) приводит к уравнениям Лагранжа в 4-мерной форме (уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле)

$$mc \frac{du_\mu}{ds} - \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu = 0, \quad (1.47)$$

где движение заряженной частицы описывается вектором 4-скорости u^i .

Если ввести обозначение

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (1.48)$$

то уравнения движения (1.44) можно переписать как

$$\frac{du^\mu}{ds} = \frac{q}{mc^2} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (1.49)$$

Эти уравнения суть уравнения Лоренца. Такая запись уравнений справедлива только в декартовых координатах.

Чтобы уравнения (1.49) были справедливы в произвольных криволинейных координатах, их необходимо переписать как

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = \frac{q}{mc^2} F^{\alpha\beta} u_\beta, \quad (1.50)$$

здесь

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = (1/2)g^{\alpha\delta}(g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\delta\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta})$$

— символ Кристоффеля, который выражается через метрический тензор. Такая запись называется ковариантной, т.е. запись, при которой сохраняется вид данного уравнения при произвольных преобразованиях координат.

Символ Кристоффеля появляется при использовании криволинейной координатной системы. В общей теории относительности, когда рассматриваются неинерциальные системы отсчета и сильные гравитационные поля, искривляется само пространство-время, а вместе с ним искривляются даже декартовы координаты. В этом случае уравнение движения тоже записываются в виде (1.50) [22].

1.9. Тензор электромагнитного поля

Антисимметричный тензор второго ранга $F_{\alpha\beta}$, определенный выражением (1.45) называется тензором электромагнитного поля. Это название становится понятным, если расписать все компоненты (1.45) и ввести по определениям напряженности электрического (1.17) и магнитного (1.18) полей. Нередко результат удобно представить в матричном виде

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Таким образом, в 4-мерном формализме электрическое поле и магнитное поле являются не векторами, а компонентами антисимметричного тензора второго ранга.

1.10. Преобразование Лоренца для электромагнитного поля

Преобразования Лоренца в 4-мерном виде для тензора $F^{\alpha\beta}$ записывается как

$$F'^{\alpha\beta} = L_{\gamma}^{\alpha} L_{\delta}^{\beta} F^{\gamma\delta}, \quad F'_{\alpha\beta} = \tilde{L}_{\alpha}^{\gamma} \tilde{L}_{\beta}^{\delta} F_{\gamma\delta} \quad (1.52)$$

Возьмем специальное преобразование Лоренца (1.14) и подставим в (1.52). Расписывая, получим явный вид преобразования напряженностей электрического и магнитного полей при переходе в другую ИСО:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z), & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Преобразование (1.53) можно переписать в более компактной форме, если выделить, относительно скорости $\vec{\beta}$, продольные и поперечные компоненты полей

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + [\vec{\beta} \vec{B}_{\perp}]), \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - [\vec{\beta} \vec{E}'_{\perp}]). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Учитывая, что $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$, $\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}$ и $[\vec{\beta} \vec{B}_{\parallel}] = 0$, можно переписать (1.54) в виде общего преобразования Лоренца

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= (1 - \gamma) \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) / \beta^2 + \gamma (\vec{E} + [\vec{\beta} \vec{B}]), \\ \vec{B}' &= (1 - \gamma) \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) / \beta^2 + \gamma (\vec{B} - [\vec{\beta} \vec{E}]). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Обратные к (1.55) преобразования полей получаются с помощью замены $\vec{\beta} \rightarrow -\vec{\beta}$.

1.11. Инварианты электромагнитного поля

При изучении свойств 4-векторов, мы интересуемся также инвариантными свойствами, скалярными квадратами и скалярными произведениями. Инвариантные свойства 4-тензоров тоже представляют большой интерес, поэтому нам нужно вычислить все 4-скаляры, которые можно образовать из тензоров.

Простейший инвариант тензора электромагнитного поля оказывается тривиальным $F^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \equiv 0$, т.к. это следствие антисимметричности тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$.

Однако можно сконструировать и нетривиальные 4-скаляры из антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}$. Для этого необходимо свернуть тензор с другим антисимметричным тензором. Роль этого другого антисимметричного тензора играет либо сам тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, либо дуальное сопряже-

ние к нему $F_{\mu\nu}^*$. В итоге получаем два независимых инварианта: скаляр и псевдоскаляр

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = inv ; \quad (1.56)$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = inv . \quad (1.57)$$

Распишем свертки (1.56) и (1.57) явным образом в трехмерной форме

$$B^2 - E^2 = inv , \quad (\vec{E} \cdot \vec{B}) = inv \quad (1.58)$$

Замечание. Любая функция от инварианта есть инвариант. Поэтому принято определять их как простейшее инвариантное выражение, с точностью до знака и постоянного коэффициента.

Инварианты (1.56) – (1.58) не меняются при переходе в другую ИСО, а поэтому являются мощным инструментом для решения задач.

Пример, если в некоторой ИСО $(\vec{E} \cdot \vec{B}) > 0$, то угол между векторами останется острым во всех ИСО и обязательно существует ИСО, в которой векторы параллельны. Аналогично, если в некоторой ИСО $(\vec{E} \cdot \vec{B}) < 0$, то угол между векторами останется тупым во всех ИСО и обязательно существует ИСО, в которой векторы антипараллельны. Если в некоторой ИСО $(\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0$, то угол между векторами останется прямым во всех ИСО.

Другой пример, если в некоторой ИСО $B^2 > E^2$, то это неравенство будет выполняться во всех ИСО и обязательно существует ИСО, в которой $\vec{E} = 0$. Аналогично, если в некоторой ИСО $B^2 < E^2$, то это неравенство будет выполняться во всех ИСО и обязательно существует ИСО, в которой $\vec{B} = 0$. Если в некоторой ИСО $B^2 = E^2$, то равенство будет выполняться во всех ИСО.

В литературе можно встретить другой вывод независимых инвариантов тензора электромагнитного поля. Антисимметричный тензор второго ранга имеет шесть независимых компонент и называется бивектором, т.е. два 3-мерных вектора. Этот математический объект можно представить как один 3-мерный комплексный вектор $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{B}$. Преобразования Лоренца эквивалентны пространственному повороту в 3-мерном комплексном пространстве. Поэтому квадрат комплексного вектора является комплексным инвариантом: $\vec{F}^2 = E^2 - B^2 + 2i\vec{E} \cdot \vec{B} = inv$, действительная и мнимая части которого пропорциональны выражениям (1.58).

Знание инвариантов позволяет построить инвариантный элемент действия и вывести уравнения поля из вариационного принципа $\delta S = 0$. В выраже-

ниях (1.58) первый инвариант является скаляром, а второй инвариант — псевдоскаляром. Именно первый инвариант $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = inv$ используется для конструирования действия. Если мы подставим в $\delta S = 0$ действие, содержащее только полевые переменные $dS_f \propto F_{ik}F^{ik} d\Omega$ ($d\Omega$ — элемент 4-объема), то получим уравнения свободного поля, без источников, т.е. без зарядов и токов.

Контрольные вопросы

1. Что такое пробная частица?
2. Что такое пробный заряд?
3. Как записываются уравнения Лагранжа в аналитической механике?
4. Как записывается закон всемирного тяготения Ньютона?
5. Как выглядит ньютоновский гравитационный потенциал?
6. Записать трехмерные уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле.
7. Записать уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле в ковариантном виде.
8. Какие существуют инварианты электромагнитного поля?
9. Что такое калибровочная инвариантность электромагнитного поля?
10. Как связан тензор электромагнитного поля в 4-потенциалом?

Глава 2. Уравнения электромагнитного поля

2.1. Уравнения Лагранжа для непрерывных систем

В отличие от аналитической механики, где были введены лагранжев и гамильтонов формализмы для дискретных физических систем, в теории электромагнитного поля необходимо воспользоваться подходом, рассматривающим поле как непрерывную среду, т.е. континуум.

В первую очередь необходимо ввести полевые переменные, играющие в полевой теории роль обобщенных координат в аналитической механике и являющихся функциями независимых переменных. В нашем подходе – это четыре координаты: x^0 , x^1 , x^2 , x^3 , которые не подвергаются варьированию, и будут обозначаться как x^μ . Обозначим полевые переменные здесь как $q_\alpha(x^\mu)$, представляющие в нашем случае 4-потенциалы A_α , т.е. полевые переменные с точки зрения вариационного исчисления суть переменные величины и подвергаются варьированию. Вообще говоря, полевые переменные могут быть скалярами $q(x^\mu)$, описывающими скалярное поле, векторами $q_\alpha(x^\mu)$, отвечающими векторному полю (электродинамика), тензорами $q_{\alpha\beta}(x^\mu)$, характеризующими тензорное поле, например гравитационное, и т.д.

Далее необходимо определить запись функции Лагранжа L для такой непрерывной (сплошной) среды, а затем действие S . Для этого вводится плотность функции Лагранжа как

$$L = L(q_\alpha; q_{\alpha,\beta}; x^\alpha), \quad (2.1)$$

где $q_{\alpha,\beta}$ есть аналог обобщенной скорости.

Функция Лагранжа теперь определяется как интеграл от плотности функции Лагранжа по 3-мерному объему

$$L = \int_V L(q_\alpha; q_{\alpha,\beta}; x^\alpha) dV. \quad (2.2)$$

Тогда действие запишется аналогично как в механике

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V L(q_\alpha; q_{\alpha,\beta}; x^\alpha) dV dt = \frac{1}{c} \int L(q_\alpha; q_{\alpha,\beta}; x^\alpha) d\Omega, \quad (2.3)$$

где в декартовой системе координат элемент 4-объема записывается как

$$d\Omega = c dt \cdot dx \cdot dy \cdot dz = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 .$$

Из принципа наименьшего действия $\delta S = 0$ для задачи с закрепленными концами

$$\delta q_\alpha(x^\mu)|_V = \delta q_\alpha(x^\mu)|_{t_1} = \delta q_\alpha(x^\mu)|_{t_2} = 0 \quad (2.4)$$

получаются уравнения поля (аналоги уравнений движения в механике)

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_{\alpha,\beta}} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_\alpha} = 0 , \quad (2.5)$$

где $q_{\alpha,\beta} \equiv \partial q_\alpha / \partial x^\beta$ — частная производная полевой переменной $q_\alpha(x^\mu)$ по x^β .

При получении уравнений (2.5) была использована теорема Гаусса для 3-мерного пространства и условия закрепления (2.4). Уравнения поля (2.5) представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, в отличие от системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения для материальных точек в механике.

2.2. Действие для электромагнитного поля

В главе 1 было построено действие (1.7), состоящее из двух частей: действия для свободной частицы, зависящего только от свойств частиц (см. (1.5)), и действия, описывающего взаимодействие между электромагнитным полем и заряженной частицей (см. (1.5.a)). При нахождении уравнений движения мы считали, что частица движется в заданном электромагнитном поле и поэтому нам не нужны были уравнения самого поля. Однако часть общего действия, определяющая электромагнитное поле, становится необходимой, если мы хотим найти уравнения самого поля.

Для определения вида действия для поля нам следует учитывать важное свойство электромагнитного поля, **свойство суперпозиции**. Другими словами, электромагнитное поле подчиняется **принципу суперпозиции**, т.е. создаваемое системой зарядов поле есть результат простого сложения полей от каждого заряда. Это означает, что напряженности результирующего поля в каждой точке равны векторной сумме напряженностей в этой точке каждого из полей.

Необходимо подчеркнуть, что в выражение для действия поля не должны входить потенциалы поля из-за их неоднозначности. Тогда остаются производные от потенциалов, но только первого порядка, т.к. в функцию Лагранжа могут входить лишь первые производные по времени. Кандидатом, удовлетворяющим этим условиям, оказывается тензор электромагнитного поля. С другой стороны, действие есть скаляр, и поэтому должно быть интегралом от некоторого скаляра, которым и является инвариант $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Следовательно, часть общего действия, отвечающая за поле, должна иметь вид

$$S_{field} = \int_{t_1}^{t_2} L_f dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V L_f dV dt = -\frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} dV dt = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d\Omega, \quad (2.6)$$

где знак минус взят для того, чтобы обеспечить единственный минимум для функционала действия, численный коэффициент связан с выбором системы единиц. В данном случае система СГС.

Таким образом, получаем плотность функции Лагранжа для электромагнитного поля

$$L_f = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2), \quad (2.7)$$

а функция Лагранжа запишется как

$$L_f = -\frac{1}{16\pi} \int_V F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} dV = \frac{1}{8\pi} \int_V (E^2 - H^2) dV, \quad (2.8)$$

что позволит выписать полное действие для электромагнитного поля вместе с электрическими зарядами в нем

$$S = -\sum \int mc ds - \sum \int \frac{q}{c} A_\alpha dx^\alpha - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d\Omega. \quad (2.9)$$

В отличие от ранее рассматривавшегося случая движения зарядов в заданном электромагнитном поле, когда заряды считались пробными, теперь такое условие уже не накладывается на заряды, а 4-потенциалы A_α и напряженности электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ относятся к истинному полю, включающему в себя как само внешнее поле, так и поле, создаваемое зарядами. Другими словами, A_α и $F_{\alpha\beta}$ зависят как положения, так и от скорости зарядов системы.

2.3. Четырехмерный вектор тока и уравнение непрерывности

Если рассматривать не только электромагнитное поле как непрерывную среду, но и систему электрических зарядов, введя непрерывное распределение зарядов в пространстве, то необходимо тогда определить понятие плотности заряда как заряд на единицу объема, обозначив как ρ . Плотность заряда, вообще говоря, есть функция координат и времени, а интеграл по пространственному объему равен заряду, находящемуся в этом объеме.

Однако выше уже обсуждался вопрос, связанный с тем, что в реальности заряды необходимо считать точечными, что бы избежать противоречий. Поэтому можно воспользоваться представлением точечного заряда через δ -функцию Дирака для записи плотности точечного заряда

$$\rho_a = q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (2.10)$$

где индекс a нумерует заряды и место их положения, \vec{r}_a – радиус-вектор заряда q_a .

Если просуммировать по всем точкам a зарядовые плотности, то получим распределение плотности электрического заряда в системе

$$\rho = \sum_a \rho_a = \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (2.11)$$

а интеграл по объему, занимаемому всеми зарядами системы, есть сумма зарядов системы

$$\int_V \rho dV = \int_V \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = \sum_a q_a. \quad (2.12)$$

Введем элементарный заряд

$$\delta q = \rho dV \quad (2.13)$$

и произведем его перемещение (сдвиг) на dx^α и воспользуемся тем, что этот сдвиг можно выразить через 4-скорость частицы

$$\delta q dx^\alpha = \rho dV dx^\alpha = \rho dV \frac{dx^\alpha}{dt} dt = \rho dV u^\alpha ds. \quad (2.14)$$

Из соотношения (2.14) видно, что перемещение заряда можно описывать **4-вектором плотности тока**, пропорциональным 4-скорости и имеющего следующие компоненты,

$$j^\alpha = \rho \frac{dx^\alpha}{dt} = \rho u^\alpha \frac{ds}{dt} = \rho(c, \vec{v}) = (j^0, j^i), \quad (2.15)$$

где

$$j^0 = \rho c, \quad \vec{j} = \rho \vec{v} = j^0 \frac{\vec{v}}{c}. \quad (2.16)$$

В сопутствующей системе отсчета (3-скорость заряда $\vec{v} = 0$) получаем

$$j^\alpha|_{v=0} = \rho c u^\alpha|_{v=0} = \rho(c, 0, 0, 0). \quad (2.17)$$

Так как электрический заряд есть инвариант относительно выбора системы отсчета, то полный заряд системы может быть записан как интеграл

$$q = \int_V \rho dV = \frac{1}{c} \int_V j^0 dV = \frac{1}{c} \int j^\alpha dS_\alpha, \quad (2.18)$$

где в 4-мерном случае интегрирование производится по всей 4-мерной гиперповерхности, перпендикулярной оси времени $x^0 = ct$, а dS_0 в сопутствующей системе отсчета совпадает с dV .

Используя (2.14), (2.15) и (2.18), перепишем общее действие (2.6) с учетом 4-вектора плотности тока

$$S = -\sum \int mc ds - \sum \int \frac{1}{c^2} A_\alpha j^\alpha d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega. \quad (2.19)$$

Далее рассмотрим изменение электрического заряда в некотором 3-объеме за счет наличия потока вектора плотности тока \vec{j} через 2-поверхность Σ , охватывающую данный 3-объем.

Количество электрического заряда, проходящего через элемент 2-поверхности $d\Sigma$ за единицу времени равно $\vec{j} d\Sigma$. Эта величина заряда может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от того втекает

заряд в объем или вытекает, т.е. положительно или отрицательно скалярное произведение $\vec{j} d\vec{\Sigma}$, что зависит от направления вектора \vec{j} , т.к. вектор нормали к 2-поверхности всегда направлен в положительном направлении: наружу от рассматриваемого объема. Такой приток или отток заряда должен описываться изменением по времени величины заряда в данном объеме, выражением $\partial q / \partial t$. Учитывая, что при этом выполняется закон сохранения электрического заряда, следует записать

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \oint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{\Sigma} \quad (2.20)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{\Sigma}. \quad (2.21)$$

Воспользуемся теоремой Гаусса и запишем поток вектора \vec{j} как

$$\oint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{\Sigma} = \int (\operatorname{div} \vec{j}) dV. \quad (2.22)$$

Тогда соотношение (2.21) перепишется в виде

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0. \quad (2.23)$$

Отсюда сразу получаем **уравнение непрерывности**

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.24)$$

2.4. Уравнения Максвелла в 3-мерной и 4-мерной формах записи

Воспользуемся выражениями для напряженностей электромагнитных полей (1.17) и (1.18)

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (2.25)$$

Теперь образуем от (2.25) следующие выражения

$$\text{rot } \vec{E} \quad \text{и} \quad \text{div } \vec{H}. \quad (2.26)$$

Воспользовавшись тем, что ротор всякого градиента равен нулю, а дивергенция ротора всегда равна нулю, получим два уравнения на напряженности электромагнитного поля

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (2.27)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (2.28)$$

Полученные уравнения (2.27) и (2.28) суть **первая пара уравнений Максвелла**.

Если использовать теорему Гаусса, то из (2.28) вытекает интегральная формулировка одного из уравнений Максвелла: **поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю**,

$$\oint \vec{H} d\Sigma = 0. \quad (2.29)$$

С помощью теоремы Стокса можно другое уравнение Максвелла записать в интегральной форме: **циркуляция вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру равна с обратным знаком производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, ограничиваемую этим контуром**

$$\oint \vec{E} dl = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} d\Sigma. \quad (2.30)$$

Циркуляция вектора напряженности электрического поля известна еще в электротехнике **как электродвижущая сила** в заданном контуре.

Первая пара уравнений Максвелла в дифференциальной форме может быть обобщена на 4-мерие, исходя из определения тензора электромагнитного поля через 4-потенциал, и записана как

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.31)$$

или, используя дуальное сопряжение,

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (2.32)$$

При нахождении второй пары уравнений Максвелла следует иметь ввиду ранее отмечавшееся по поводу введения полевых переменных, что варьируются потенциалы электромагнитного поля, а вектор плотности тока, координатные переменные не варьируются. Кроме того, в выражении действия (2.19) первое слагаемое при решении вариационной задачи на нахождение полевых уравнений равно нулю, т.к. связано с нахождением уравнений движения. Тогда

$$\delta S = -\sum \int \frac{1}{c^2} j^\alpha \delta A_\alpha d\Omega - \frac{1}{8\pi c} \int F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} d\Omega = 0 \quad (2.33)$$

Подставляя определение тензора электромагнитного поля через 4-потенциал, применяя теорему Гаусса и условие исчезновения поля на пространственной бесконечности, приходим к интегралу

$$\int \left(\frac{1}{c} j^\alpha + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \right) \delta A_\alpha d\Omega = 0 \quad (2.34)$$

В силу произвольности вариаций 4-потенциала, получаем уравнения Максвелла с источником в виде 4-вектора плотности тока

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad (2.35)$$

Расписывая по компонентам систему уравнений (2.35) и выражая составляющие тензора электромагнитного поля через компоненты напряженностей электрического и магнитного полей, сведем (2.35) в трехмерных обозначениях к одному векторному и одному скалярному уравнениям

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad (2.36)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (2.37)$$

Эти уравнения и представляют **вторую пару уравнений Максвелла**. Вместе с первой парой уравнений (2.27) и (2.28) полученные уравнения являются системой уравнений Максвелла, описывающей электромагнитное поле.

Применение теоремы Гаусса к уравнению (2.37) позволяет записать это уравнение Максвелла в интегральной форме: **поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченном данной поверхностью, умноженному на коэффициент 4π**

$$\oint \vec{E} d\Sigma = 4\pi \int \rho dV = 4\pi q. \quad (2.38)$$

Векторное уравнение (2.36) с помощью теоремы Стокса может быть представлено в интегральной форме: **циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна умноженной на коэффициент $4\pi/c$ сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром**

$$\oint \vec{H} dl = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\Sigma + \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} d\Sigma. \quad (2.39)$$

Кроме истинных токов, связанных с движением электрических зарядов, появляется **ток смещения**, вызванные изменением электрического поля во времени

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.40)$$

Кроме того, учет коммутативности частных производных и антисимметричности тензора электромагнитного поля, можно получить из (2.35) закон сохранения 4-тока

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (2.41)$$

В трехмерных обозначениях (2.41) сводится к уравнению непрерывности (2.39).

2.6. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

В начале главы были получены лагранжевы уравнения поля («уравнения движения») (2.5) для непрерывной среды. Естественно, что в такой среде существуют и законы сохранения. Одним из таких законов является закон сохранения тензора энергии-импульса (ТЭИ), который объединяет плотность энергии, плотность потока энергии и плотность потока импульса, называемы так же тензором напряжений.

В полевой теории этот закон записывается как

$$\frac{\partial T_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0, \quad (2.42)$$

где T_{α}^{β} – тензор энергии-импульса, определяемый в лагранжевом подходе выражением

$$T_{\alpha}^{\beta} = q_{\gamma,a} \frac{\partial L}{\partial q_{\gamma,\beta}} - \delta_{\alpha}^{\beta} L. \quad (2.43)$$

Знание ТЭИ позволяет вычислить импульс объема сплошной среды или поля, заключенного внутри гиперповерхности с элементом интегрирования dS_{β} , как интеграл

$$P^{\alpha} = \frac{1}{c} \int T^{\alpha\beta} dS_{\beta}. \quad (2.44)$$

Момент импульса определяется аналогично тому, как это делалось в механике

$$M^{\alpha\beta} = \int (x^{\alpha} dp^{\beta} - x^{\beta} dp^{\alpha}) = \frac{1}{c} \int (x^{\alpha} T^{\beta\gamma} - x^{\beta} T^{\alpha\gamma}) dS_{\gamma}. \quad (2.45)$$

Чтобы для замкнутой системы выполнялся закон сохранения момента импульса, тензор энергии-импульса должен быть симметричным

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} (x^{\alpha} T^{\beta\gamma} - x^{\beta} T^{\alpha\gamma}) = 0 \Rightarrow T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}. \quad (2.46)$$

Самая простая макроскопическая модель сплошной среды это идеальная жидкость, т.е. среда, в которой выполняется закон Паскаля и нет диссипативных процессов (вязкость, теплопроводность и т.п.).

Тензор энергии-импульса идеальной жидкости записывается как

$$T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}, \quad (2.47)$$

где p — давление среды, $\varepsilon = \rho c^2$ — плотность массы-энергии, u^α — 4-скорость, $g^{\alpha\beta}$ — метрический тензор.

Набор физических величин, необходимых для описания электромагнитного поля в 4-мерном формализме объединяются в симметричный тензор энергии-импульса

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\alpha\gamma} F^\beta{}_\gamma + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right). \quad (2.48)$$

Из определения (2.48) видно, что этот тензор имеет нулевой след $g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0$, что на классическом уровне отражает отсутствие массы покоя у кванта электромагнитного поля – фотона.

Контрольные вопросы

1. В чем особенности вывода уравнений поля из вариационного принципа по сравнению с получением уравнений движения в аналитической механике?
2. Что такое плотность функции Лагранжа и как она связана с функцией Лагранжа?
3. Каков вид действия для электромагнитного поля?
4. Что такое вектор плотности тока?
5. Как выглядит уравнение непрерывности для тока?
6. Записать 1-ю пару уравнений Максвелла.
7. Записать 2-ю пару уравнений Максвелла.
8. Записать уравнения Максвелла в 4-мерной формулировке.
9. Как записать плотность точечного заряда?
10. Что такое тензор энергии-импульса идеальной жидкости?
11. Чему равен след тензора энергии-импульса электромагнитного поля?

Глава 3. Статические электрические и магнитные поля

3.1. Постоянное электрическое поле

С точки зрения решения уравнений Максвелла, самый простой случай – это случай постоянного электрического поля при отсутствии магнитного. К тому же к этому случаю сводится немалая часть практических задач. Рассмотрим его.

В случае постоянного электрического поля – такое поле называется электростатическим – уравнения Максвелла имеют вид:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (3.2)$$

и электрическое поле \vec{E} выражается только через скалярный потенциал φ соотношением

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.1), находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (3.4)$$

Это уравнение носит название уравнения Пуассона. В случае отсутствия зарядов рассматриваемой области, т. е. при равной нулю плотности зарядов ρ , потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (3.5)$$

Из последнего уравнения следует, в частности, что в такой области потенциал электрического поля нигде не может иметь ни максимума, ни минимума. Действительно, для того чтобы φ имело экстремальное значение, необходимо, чтобы все первые производные от φ по координатам были равны нулю, – а вторые производные имели одинаковый знак. Последнее, однако, невозможно, так как при этом не может быть удовлетворено уравнение (3.5).

3.2. Закон Кулона

Покажем здесь, что закон Кулона есть одно из простейших решений уравнений Максвелла для электростатики.

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Очевидно, что его можно определить двумя разными способами: или решая уравнение (3.5) для потенциала, или решая систему уравнений (3.1), (3.2) для поля. Мы пойдем по второму пути, как по более физическому. Из соображений симметрии ясно, что поле \vec{E} будет направлено в каждой точке по радиус-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд e . Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина \vec{E} поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения этой абсолютной величины воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса и применим уравнение (3.1.1) в интегральной форме:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dv = \int_V 4\pi\rho dv = \oint_S \vec{E} dS = 4\pi e. \quad (3.6)$$

Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом R , проведенную вокруг заряда e , равен $4\pi R^2 \vec{E}$, этот поток должен быть равен $4\pi e$. Отсюда находим:

$$E = \frac{e}{R^2}, \quad (3.7)$$

или в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}}{R^3}. \quad (3.8)$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату, расстояния от этого заряда. Это — так называемый закон Кулона. Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{e}{R}. \quad (3.9)$$

Если мы имеем систему зарядов, то создаваемое ею поле, согласно принципу суперпозиции, равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. Потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{R_{\alpha}}, \quad (3.10)$$

где R_{α} — расстояние от заряда e_{α} до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда ρ , то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{e}{R} dV, \quad (3.11)$$

где R — расстояние от элемента объема dV до данной точки («точки наблюдения») поля.

Отметим что при выводе (3.11) использовано определение 3-х мерной δ -функции: при подстановке в (3.11) значений ρ и φ для точечного заряда, т. е. $\rho = e\delta(R)$ и $\varphi = e/R$ получается следующее математическое соотношение:

$$\Delta \frac{1}{R} = 4\pi\delta(\vec{R}), \quad (3.12)$$

которое определяет 3-х мерную δ -функцию через лапласиан.

3.3. Поле равномерно движущегося заряда

Интересно отметить, что при желании магнитное поле можно считать «несамостоятельным», просто как проявление эффектов специальной теории относительности.

Определим поле, создаваемое зарядом e , движущимся равномерно со скоростью v . неподвижную систему отсчета будем называть системой K ; систему отсчета, движущуюся вместе с зарядом, — системой K' . Пусть заряд находится в начале координат системы K' ; система K' движется относительно K параллельно оси x ; оси y и z параллельны y' и z' . В момент времени $t = 0$ начала обеих систем совпадают. Координаты заряда в системе K , следовательно, $x = vt$, $y = z = 0$. В системе K' мы имеем постоянное электрическое поле с векторным потенциалом $\vec{A}' = 0$ и скалярным $\varphi' = e/R'$, где $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Применяя преобразования Лоренца для потенциалов электромагнитного поля, в системе K получаем

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{R' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.13)$$

Мы должны теперь выразить R' через координаты x, y, z в системе K . Согласно формулам преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (3.14)$$

и отсюда

$$R' = \frac{(x - vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2 + z^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.15)$$

Подставляя это в (3.13), находим:

$$\varphi = \frac{e}{R^*}, \quad (3.16)$$

где введено обозначение

$$R^{*2} = (x - vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2 + z^2). \quad (3.17)$$

Векторный потенциал в системе K равен

$$\vec{A} = \varphi \frac{\vec{v}}{c} = \frac{e\vec{v}}{cR^*}. \quad (3.18)$$

В системе K' магнитное поле H' отсутствует, а электрическое

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{R}'}{cR'^3}. \quad (3.19)$$

А в системе K

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -e\nabla \frac{1}{R^*} - \frac{e\vec{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{R^*} = \frac{e}{R^{*2}} \left(\nabla R^* + \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} R^* \right), \quad (3.20)$$

Используя (3.17), находим:

$$\vec{E} = (1 - \frac{v^2}{c^2}) \frac{e\vec{R}}{R^{*3}}, \quad (3.21)$$

где \vec{R} — радиус-вектор от заряда e к точке наблюдения x, y, z поля (его компоненты равны $x - vt, y, z$).

Это выражение для \vec{E} можно написать в другом виде, введя угол θ между направлением движения и радиус-вектором \vec{R} . Очевидно, что $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta$, и потому R^{*2} можно написать в виде

$$R^{*2} = R^2 (1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta). \quad (3.22)$$

Тогда для \vec{E} имеем;

$$\vec{E} = \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta)} \frac{e\vec{R}}{R^3}. \quad (3.23)$$

При заданном расстоянии R от заряда величина поля E возрастает с увеличением θ от нуля до $\pi/2$ (или при уменьшении от π до $\pi/2$). Наименьшее значение поле имеет в направлении, параллельном направлению движения ($\theta = 0, \pi$); оно равно

$$E_{\parallel} = (1 - \frac{v^2}{c^2}) \frac{e}{R^2}. \quad (2.34)$$

Наибольшим же является поле, перпендикулярное к скорости ($\theta = \pi/2$), равное

$$E_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{e}{R^2}. \quad (3.25)$$

Отметим, что при увеличении скорости поле E_{\parallel} падает, а E_{\perp} возрастает. Можно сказать, что электрическое поле движущегося заряда как бы

«сплющивается» по направлению движения. При скоростях v , близких к скорости света, знаменатель в формуле (3.23) близок к нулю в узком интервале значений θ вокруг значения $\theta = \pi/2$. Ширина этого интервала порядка величины

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.26)$$

Таким образом, электрическое поле быстро движущегося заряда на заданном расстоянии от него заметно отлично от нуля лишь в узком интервале углов вблизи экваториальной плоскости, причем ширина этого интервала падает с увеличением v как $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Магнитное поле в системе K равно

$$\vec{H} = \text{rot}\vec{A} = \left[\nabla, \varphi \frac{\vec{v}}{c} \right] = -\frac{1}{c} [\vec{v} \nabla \varphi] = \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{E}]. \quad (3.27)$$

В частности, при $v \ll c$ электрическое поле приближенно дается обычной формулой закона Кулона $\vec{E} = e\vec{R}/R^3$, и тогда магнитное поле

$$\vec{H} = \frac{e}{c} \frac{[\vec{v}\vec{R}]}{R^3} \quad (3.28)$$

Задача ([1]. стр 130)

Определить силу взаимодействия (в системе K) между двумя зарядами, движущимися с одинаковыми скоростями v .

Решение. Искомую силу \vec{F} вычисляем как силу, действующую на один из зарядов (e_1) в поле, создаваемом вторым зарядом (e_2). Имеем с помощью (3.27):

$$\vec{F} = e_1 \vec{E}_2 + \frac{e_1}{c} [\vec{v} \vec{H}_2] = e_1 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{E}_2 + \frac{e_1}{c} \vec{v} (\vec{v} \vec{E}_2). \quad (3.29)$$

Подставив сюда E_2 из (3.23), получим для составляющих силы в направлении движения (F_x) и перпендикулярно к нему (F_y):

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos \theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}}, F_y = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin \theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.30)$$

где \vec{R} — радиус-вектор от e_2 к e_1 а θ — угол между \vec{R} и \vec{v} . Заметим, что в связанной с зарядами системе отсчета их взаимодействие является чисто «Кулоновским». При переходе же в движущуюся систему возникают явления увеличения интервалов времени и сокращения расстояний, которые приводят к соотношениям (3.29). Таким образом, появление магнитного поля связано с относительностью движения рассматриваемых систем отсчета в СТО.

3.4. Дипольный и мультипольный моменты

Очевидно, что наибольший практический интерес представляет задача определения электрического поля системы зарядов на расстояниях, существенно превышающих размеры самой системы зарядов.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-векторы отдельных зарядов обозначим \vec{r}_α . Потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке с радиус-вектором \vec{R}_0 , равен

$$\varphi = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_{\alpha}|}, \quad (3.31)$$

(суммирование производится по всем зарядам); здесь $(\vec{R}_0 - \vec{r}_{\alpha})$ — радиус-векторы от зарядов e_{α} к точке, где мы ищем потенциал. Мы должны исследовать это выражение для больших \vec{R}_0 ($R_0 \gg r_{\alpha}$). Для этого разложим его в ряд по степеням r_{α} / R_0 , воспользовавшись формулой

$$f(\vec{R}_0 - \vec{r}) \approx f(\vec{R}_0) - \vec{r} \text{grad} f(\vec{R}_0), \quad (3.32)$$

(в grad дифференцирование производится по координатам конца вектора \vec{R}_0). С точностью до членов первого порядка

$$\varphi = \frac{\sum e_{\alpha}}{R_0} - \text{grad} \frac{1}{R_0} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} = \frac{Q}{R_0} - \vec{d} \text{grad} \frac{1}{R_0}. \quad (3.33)$$

Здесь $Q = \sum_{\alpha} e_{\alpha}$ - полный заряд системы, а сумма

$$\vec{d} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \quad (3.34)$$

носит название дипольного момента системы зарядов. Существенно, что если сумма всех зарядов Q равна нулю, то дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Действительно, радиус-векторы \vec{r}_{α} и \vec{r}'_{α} одного и того же заряда в двух разных системах координат связаны друг с другом соотношением

$$\vec{r}'_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} + \vec{a}, \quad (3.35)$$

где \vec{a} — некоторый постоянный вектор. Поэтому если $\sum_{\alpha} e_{\alpha} = 0$, то дипольный момент в обеих системах одинаков:

$$\vec{d}' = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} + \vec{a} \sum_{\alpha} e_{\alpha} = \vec{d}. \quad (3.36)$$

Рассмотрим физический смысл дипольного момента. Если обозначить посредством $e_{\alpha}^{+}, \vec{r}_{\alpha}^{+}$ и $-e_{\alpha}^{-}, \vec{r}_{\alpha}^{-}$ положительные и отрицательные заряды системы и их радиус-векторы, то можно написать дипольный момент в виде

$$\vec{d} = \sum e_{\alpha}^{+} \vec{r}_{\alpha}^{+} - \sum e_{\alpha}^{-} \vec{r}_{\alpha}^{-} = \vec{R}^{+} \sum e_{\alpha}^{+} - \vec{R}^{-} \sum e_{\alpha}^{-}, \quad (3.37)$$

где

$$\vec{R}^{+} = \frac{\sum e_{\alpha}^{+} \vec{r}_{\alpha}^{+}}{\sum e_{\alpha}^{+}}, \quad \vec{R}^{-} = \frac{\sum e_{\alpha}^{-} \vec{r}_{\alpha}^{-}}{\sum e_{\alpha}^{-}} \quad (3.38)$$

— радиус-векторы «центров зарядов» положительных и отрицательных зарядов. Если $\sum e_{\alpha}^{+} = \sum e_{\alpha}^{-} = e$, то

$$\vec{d} = e\vec{R}^{+} - e\vec{R}^{-} = e\vec{R}_{+-}, \quad (3.39)$$

где \vec{R}_{+-} есть радиус-вектор от центра отрицательных к центру положительных зарядов. В частности, если имеются всего два заряда, то \vec{R}_{+-} есть радиус-вектор между ними.

Если полный заряд системы равен нулю, то потенциал ее поля на больших расстояниях

$$\varphi = -\vec{d}\nabla \frac{1}{R_0} = \frac{\vec{d}\vec{R}_0}{R_0^3}. \quad (3.40)$$

Напряженность поля

$$\vec{E} = -\nabla \frac{\vec{d}\vec{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \nabla(\vec{d}\vec{R}_0) - (\vec{d}\vec{R}_0) \nabla \frac{1}{R_0^3}, \quad (3.41)$$

или окончательно

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{n}\vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{R_0^3}, \quad (3.42)$$

где \vec{n} — единичный вектор в направлении \vec{R}_0 . Полезно также указать, что \vec{E} можно представить, до выполнения дифференцирований, в виде

$$\vec{E} = (\vec{d}\nabla) \nabla \frac{1}{R_0}. \quad (3.43)$$

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой с равным нулю полным зарядом, на больших расстояниях обратно пропорционален квадрату, а напряженность поля — кубу расстояния. Это поле обладает аксиальной симметрией вокруг направления \vec{d} . В плоскости, проходящей через это направление (которое выберем в качестве оси z), компоненты вектора \vec{E} :

$$E_z = d \frac{3\cos^2\theta - 1}{R_0^3}, \quad E_x = d \frac{3\cos\theta\sin\theta - 1}{R_0^3}. \quad (3.44)$$

Радиальная же и тангенциальная составляющие в этой плоскости

$$E_R = d \frac{2\cos\theta}{R_0^3}, \quad E_\theta = d \frac{\sin\theta}{R_0^3}. \quad (3.45)$$

Продолжим теперь разложение потенциала по степеням $1/R_0$. Пусть в

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots \quad (3.46)$$

член $\varphi^{(n)}$ пропорционален $1/R_0^{n+1}$. Мы видели, что первый член, $\varphi^{(0)}$, определяется суммой всех зарядов; второй, $\varphi^{(1)}$, называемый дипольным потенциалом системы, определяется ее дипольным моментом.

Третий член разложения равен

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}, \quad (3.47)$$

где сумма берется по всем зарядам; индекс, указывающий номер заряда, мы здесь опустили; x_α — компоненты вектора \vec{r} , а X_α — вектора \vec{R}_0 . Эта часть потенциала обычно называется квадрупольным потенциалом. Если сумма зарядов и дипольный момент системы равны нулю, то разложение начинается с $\varphi^{(2)}$. В выражение (3.47) входят шесть величин $\sum e x_\alpha x_\beta$. Однако можно видеть, что в действительности поле зависит не от шести независимых величин, а только от пяти. Это следует из того, что функция $1/R_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \frac{1}{R_0} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = 0, \quad (3.48)$$

и мы можем в (3.47) явно выделить равную нулю сумму по совпадающим индексам

$$\sum \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = 0 = \sum \vec{r}^2 \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}. \quad (3.49)$$

Поэтому

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}. \quad (3.50)$$

Тензор

$$D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (3.51)$$

называется квадрупольным моментом системы. Мы подобрали коэффициент (перед $x_\alpha x_\beta$) так, что след этого тензора — сумма его диагональных компонент — равна нулю:

$$D_{\alpha\alpha} = 0 \quad (3.52)$$

Симметричный тензор $D_{\alpha\beta}$ имеет, поэтому, всего пять независимых компонент. С его помощью можно написать:

$$\varphi^{(2)} = \sum \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}. \quad (3.53)$$

или, произведя дифференцирование

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = \frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3}, \quad (3.54)$$

и учитывая, что $\delta_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\alpha} = 0$,

$$\varphi^{(2)} = \sum \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}. \quad (3.55)$$

Как и всякий симметричный трехмерный тензор, тензор $D_{\alpha\beta}$ может быть приведен к главным осям. При этом в силу условия (3.52) в общем случае лишь два из трех главных значений независимы. Если же система зарядов симметрична относительно некоторой оси (ось z) (имеется в виду ось симметрии любого порядка выше второго), то она же является одной из главных осей тензора $D_{\alpha\beta}$. Тогда положение двух других осей в плоскости xu произвольно, и все три главных значения связаны между собой:

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}. \quad (3.56)$$

Обозначая компоненту D_{zz} как D (ее называют обычно в этом случае просто квадрупольным моментом), получим потенциал в виде

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{4R_0^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{D}{2R_0^3} P_2(\cos \theta), \quad (3.57)$$

где θ — угол между R_0 и осью z , а P_2 — полином Лежандра.

Подобно тому как это было сделано для дипольного момента, легко убедиться в том, что квадрупольный момент системы не зависит от выбора начала координат, если равны нулю как полный заряд, так и дипольный момент системы.

Аналогичным образом можно было бы написать следующие члены разложения (3.46). l -й член разложения определяется тензором (так называемым тензором 2^l -польного момента) l -го ранга, симметричным по всем своим индексам и обращающимся в нуль при свертывании по любой паре индексов; можно показать, что такой тензор обладает $2l + 1$ независимыми компонентами. (Такой тензор называют неприводимым. Обращение в нуль при свертывании означает, что из его компонент нельзя составить компонент какого-либо тензора более низкого ранга.)

Мы напишем, однако, здесь общий член разложения потенциала в другом виде, используя известную из теории сферических функций формулу

$$\frac{1}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + r^2 - 2R_0 r \cos \chi}} = \sum \frac{r^l}{R_0^{l+1}} P_l(\cos \chi), \quad (3.58)$$

где χ — угол между \vec{R}_0 и \vec{r} . Введем сферические углы Θ , Φ и θ , φ , образуемые соответственно векторами \vec{R}_0 и \vec{r} с фиксированными осями координат, и воспользуемся известной теоремой сложения для сферических функций:

$$P_l(\cos \chi) = \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}(\cos \Theta) P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{-im(\Phi-\varphi)}, \quad (3.59)$$

где P_l^m — присоединенные полиномы Лежандра. Введем также сферические функции

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \begin{cases} (-1)^m i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{-im\varphi}, & m \geq 0 \\ (-1)^{l-m} Y_{l,-m}^*(\theta, \varphi), & m < 0 \end{cases}, \quad (3.60)$$

Тогда разложение (3.58) примет вид

$$\frac{1}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r^l}{R_0^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (3.61)$$

Произведя такое разложение в каждом члене суммы (3.46), получим окончательно следующее выражение для l -го члена разложения потенциала:

$$\varphi^{(l)} = \frac{1}{R_0^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Q_m^{(l)} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi), \quad (3.62)$$

где

$$Q_m^{(l)} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} r_{\alpha}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta_{\alpha}, \varphi_{\alpha}). \quad (3.63)$$

Совокупность $2l+1$ величин $Q_m^{(l)}$ составляет $2l$ -польный момент системы зарядов.

Определенные таким образом величины $Q_m^{(1)}$ связаны с компонентами вектора дипольного момента \vec{d} формулами

$$Q_0^{(1)} = id_z, \quad Q_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}} (d_x \pm id_y). \quad (3.64)$$

Величины же $Q_m^{(2)}$ связаны с компонентами тензора $D_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$\begin{aligned} Q_0^{(2)} &= -\frac{1}{2} D_{zz}, \quad Q_{\pm 1}^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} (D_{xz} \pm iD_{yz}) \\ Q_{\pm 2}^{(2)} &= -\frac{1}{2\sqrt{6}} (D_{xx} - D_{yy} \pm 2iD_{xy}) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Задача ([1]. Стр. 138)

Определить квадрупольный момент однородно заряженного эллипсоида относительно его центра.

Решение. Заменяя суммирование в (3.51) интегрированием по объему эллипсоида, имеем:

$$D_{xx} = \rho \int (2x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz \text{ и т. д.} \quad (3.66)$$

Выбираем оси координат вдоль осей эллипсоида с началом в его центре; из соображений симметрии очевидно, что эти же оси являются главными осями тензора. Преобразованием

$$x = x'a, \quad y = y'b, \quad z = z'c \quad (3.67)$$

интегрирование по объему эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.68)$$

сводится к интегрированию по объему сферы единичного радиуса

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \quad (3.69)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \frac{e}{5}(2a^2 - b^2 - c^2), \quad D_{yy} = \frac{e}{5}(2b^2 - a^2 - c^2), \\ D_{zz} &= \frac{e}{5}(2c^2 - a^2 - b^2), \end{aligned} \quad (3.70)$$

где $e = \frac{4\pi}{3}abc\rho$ — полный заряд эллипсоида.

3.5. Система зарядов во внешнем поле

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем электрическом поле с потенциалом $\varphi(\vec{r})$. Потенциальная энергия каждого из зарядов есть $e_\alpha\varphi(\vec{r}_\alpha)$, а полная потенциальная энергия системы равна

$$U = \sum_{\alpha} e_{\alpha}\varphi(\vec{r}_{\alpha}). \quad (3.71)$$

Выберем снова систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов; \vec{r}_α — радиус-вектор заряда e_α в этих координатах.

Предположим, что внешнее поле достаточно слабо меняется на протяжении системы зарядов. Тогда мы можем разложить энергию U в ряд по степеням \vec{r}_α :

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots \quad (3.72)$$

В этом разложении первый член есть

$$U^{(0)} = \varphi_0 \sum_{\alpha} e_{\alpha} \quad (3.73)$$

где φ_0 — значение потенциала в начале координат. В этом приближении энергия системы такова, как если бы все заряды находились в одной точке. Второй член разложения

$$U^{(1)} = (\text{grad}\varphi)_0 \sum_{\alpha} e_{\alpha} r_{\alpha} \quad (3.74)$$

Введя напряженность поля \vec{E}_0 в начале координат и дипольный момент \vec{d} системы, имеем:

$$U^{(1)} = -\vec{d}\vec{E}_0 \quad (3.75)$$

Как и следовало ожидать, у нас получилась энергия взаимодействия дипольного момента системы \vec{d} с внешним полем \vec{E}_0 . Полная сила, действующая на систему во внешнем поле, есть, с точностью до рассмотренных членов,

$$\vec{F} = \vec{E}_0 \sum e_{\alpha} + (\text{grad } \vec{d}\vec{E})_0 \quad (3.76)$$

Если полный заряд равен нулю, то первый член исчезает и тогда

$$\vec{F} = (\vec{d}\nabla)\vec{E}, \quad (3.77)$$

т. е. сила определяется производными напряженности поля (взятыми в начале координат). Полный же момент действующих на систему сил есть

$$\vec{K} = \sum [\vec{r}_{\alpha} \cdot e_{\alpha} \vec{E}_0] = [\vec{d}\vec{E}_0], \quad (3.78)$$

т. е. определяется самой напряженностью поля.

Рассмотрим две системы с равными нулю суммами зарядов в каждой из них и дипольными моментами \vec{d}_1 и \vec{d}_2 , причем их взаимное расстояние велико по сравнению с их собственными размерами. Определим потенциа-

ную энергию U их взаимодействия. Для этого можно рассматривать одну из этих систем как находящуюся в поле второй. Тогда

$$U = -\vec{d}_2 \vec{E}_1. \quad (3.79)$$

где \vec{E}_1 — поле первой системы. Подставляя вместо \vec{E}_1 выражение для поля диполя (3.42), находим:

$$U = \frac{(\vec{d}_1 \vec{d}_2) R^2 - 3(\vec{d}_1 \vec{R})(\vec{d}_2 \vec{R})}{R^5}, \quad (3.80)$$

где \vec{R} — вектор расстояния между обеими системами.

Для случая, когда у одной из систем сумма зарядов отлична от нуля и равна e , аналогичным образом получаем:

$$U = e \frac{(\vec{d} \vec{R})}{R^3}. \quad (3.81)$$

Здесь \vec{R} — вектор, направленный от диполя к заряду. Следующий член разложения равен

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (3.82)$$

Здесь мы опять опустили индексы, указывающие номер заряда; значения вторых производных от потенциала берутся в начале координат. Поскольку же потенциал $\varphi(\vec{r})$ создается внешними зарядами и в рассматриваемой области удовлетворяет уравнению Лапласа, то

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (3.83)$$

или, окончательно,

$$U^{(2)} = \sum \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (3.84)$$

Теперь понятно, что общий член ряда (3.72) может быть выражен через определенные в предыдущем параграфе 2^l -полные моменты $D_m^{(l)}$ рассматриваемой системы зарядов. Для этого надо предварительно разложить потенциал $\varphi(\vec{r})$ в ряд по шаровым функциям вблизи начала координат. Общий вид такого разложения:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=-l}^l a_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.85)$$

где r , θ , φ — сферические координаты точки, а a_{lm} — постоянные коэффициенты разложения. Составляя сумму (3.85) и учитывая определение (3.71), после суммирования получаем:

$$U^{(l)} = \sum_{m=-l}^l a_{lm} Q_m^{(l)} \quad (3.86)$$

— общее решение поставленной задачи.

3.6. Постоянное магнитное поле

После рассмотрения постоянного электрического поля естественно перейти к рассмотрению постоянного магнитного поля. Уравнения Максвелла в этом случае записываются как

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (3.87)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3.88)$$

и их решение описывает магнитостатику.

Введем векторный потенциал \vec{A}

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{H}. \quad (3.89)$$

Подставив это в уравнение (3.88), получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.90)$$

Поскольку векторный потенциал поля определен неоднозначно, с точностью до градиента достаточно произвольной функции, уточним его допол-

нительным условием. Причем выберем это условие калибровки так, чтобы упростить уравнение (3.89):

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (3.91)$$

Тогда уравнение, определяющее векторный потенциал постоянного магнитного поля, приобретает вид

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.92)$$

Решение этого уравнения легко найти, заметив, что (3.92) вполне аналогично уравнению Пуассона для скалярного потенциала постоянного электрического поля, причем вместо плотности заряда ρ стоит плотность тока \vec{j} . По аналогии с решением уравнения Пуассона мы можем написать

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{R} dV, \quad (3.93)$$

где R — расстояние от точки наблюдения поля до элемента объема dV .

В случае точечных зарядов в этой формуле нужно перейти от интеграла к сумме по зарядам, подставляя вместо \vec{j} произведение $e\vec{v}$. При этом, чтобы рассматривать стационарный случай, полученные результаты нужно усреднить по времени.

Зная \vec{A} , можно найти напряженность поля:

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{c} \int \operatorname{rot} \frac{\vec{j}}{R} dV. \quad (3.94)$$

Операция rot производится по координатам точки наблюдения. Поэтому rot можно перенести под знак интеграла и, более того, при дифференцировании можно считать \vec{j} постоянным. Тогда

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{j}}{R} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R}, \vec{j} \right] = \frac{[\vec{j}\vec{R}]}{R^3}. \quad (3.95)$$

и, следовательно,

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}\vec{R}]}{R^3} dV, \quad (3.96)$$

где радиус-вектор \vec{R} направлен из dV в точку наблюдения. Мы получили закон Био и Савара.

3.7. Магнитный момент

Естественно, что полученные выше результаты о мультипольном разложении электростатического поля применимы и в случае магнитостатики.

Если область токов занимает ограниченную область пространства, то, выбрав центр координат внутри этой области, для расстояний, существенно превышающих размер области токов, имеем

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{|\vec{R} - \vec{r}|} dV = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R_0^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \vec{Q}_m^{(l)} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi), \quad (3.97)$$

где

$$\vec{Q}_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \iiint \vec{j}(\vec{r}) r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.98)$$

Промежуточные выкладки, как нетрудно убедиться, полностью аналогичны (3.61)-(3.63), там же описан выбор сферических координат точки наблюдения R , Θ , Φ и области интегрирования r , θ , φ .

Ожидаемое отличие от электростатики состоит в том, что, вследствие отсутствия магнитных зарядов, $\vec{Q}_m^{(0)}$ должно равняться нулю. Убедимся, что это так. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\vec{Q}_m^{(0)} = \int \vec{j}(\vec{r}) dV. \quad (3.99)$$

Умножим вектор $\vec{Q}_m^{(0)}$ на произвольный постоянный вектор \vec{a} и с помощью уравнения Максвелла в виде (3.92) выразим \vec{j} через \vec{A} . Тогда

$$\vec{a} \vec{Q}_m^{(0)} = \int \vec{a} \vec{j}(\vec{r}) dV = -\frac{c}{4\pi} \int \vec{a} \Delta \vec{A} dV = -\frac{c}{4\pi} \int \vec{a} \Delta \vec{A} dV. \quad (3.100)$$

Но, в силу постоянства \vec{a} ,

$$\vec{a} \Delta \vec{A} = \Delta(\vec{a} \vec{A}) = \text{div grad}(\vec{a} \vec{A}), \quad (3.101)$$

и тогда с помощью теоремы Остроградского-Гаусса получаем

$$\vec{a}\vec{Q}_m^{(0)} = -\frac{c}{4\pi} \int \text{div grad}(\vec{a}\vec{A}) dV = -\frac{c}{4\pi} \oint \nabla(\vec{a}\vec{A}) d\vec{S}, \quad (3.102)$$

где интегрирование проводится по достаточно произвольной замкнутой поверхности, включающей в себя область не равных нулю токов.

Дальнейшие рассуждения менее очевидны. Наша цель - преобразовать подинтегральное выражение в (3.102) так, что бы была возможность воспользоваться теоремой Стокса. Для чего заметим, что для постоянного вектора \vec{a}

$$\nabla(\vec{a}\vec{A}) = [\vec{a}\text{rot}\vec{A}] + (\vec{a}\nabla)\vec{A}, \quad (3.103)$$

но, с другой стороны

$$\text{rot}[\vec{a}\vec{A}] = \vec{a} \text{div}\vec{A} + (\vec{a}\nabla)\vec{A}. \quad (3.104)$$

Тогда

$$\nabla(\vec{a}\vec{A}) = [\vec{a} \text{rot}\vec{A}] + \text{rot}[\vec{a}\vec{A}], \quad (3.105)$$

поскольку $\text{div}\vec{A} = 0$. Теперь мы можем воспользоваться теоремой Стокса:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi}{c} \vec{a}\vec{Q}_m^{(0)} &= \oint \nabla(\vec{a}\vec{A}) d\vec{S} = \oint [\vec{a} \text{rot}\vec{A}] d\vec{S} + \oint \text{rot}[\vec{a}\vec{A}] d\vec{S} = \\ &= [\vec{a} \oint \text{rot}\vec{A} d\vec{S}] + \oint \text{rot}[\vec{a}\vec{A}] d\vec{S} = \\ &= [\vec{a} \oint \vec{A} d\vec{l}] + \oint [\vec{a}\vec{A}] d\vec{l} = 2[\vec{a} \oint \vec{A} d\vec{l}] \end{aligned} \quad (3.106)$$

В последнем интеграле интегрирование проводится по кривой, «ограничивающей» поверхность интегрирования: поскольку эта поверхность замкнута, то такой кривой не существует, и любой неособенный интеграл по этой кривой будет равен нулю. В самом деле, возьмем незамкнутую поверхность, как часть рассматриваемой, и будем достраивать ее до замкнутой. При этом граница такой поверхности будет стремиться к точке, и интеграл по ней – к нулю.

Итак, для произвольного постоянного вектора \vec{a} $(\vec{a}\vec{Q}_m^{(0)}) = 0$, и, следовательно, $\vec{Q}_m^{(0)} = 0$.

Получим теперь выражение для магнитного дипольного момента. Без труда можно записать аналогичное (3.34) выражение, но магнитный дипольный момент принято определять таким образом, что бы выражение для магнитного поля магнитного диполя было подобно выражению для электриче-

ского поля электрического диполя. Поскольку же магнитное поле выражается через ротор векторного потенциала, то в выражении для потенциала появится векторное произведение.

С точностью до дипольных членов запишем (3.93) в виде

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{|\vec{R} - \vec{r}|} dV \approx -\frac{1}{c} \int \vec{j} \left(\vec{r} \nabla \frac{1}{R} \right) dV = -\frac{1}{cR^3} \int \vec{j}(\vec{r}\vec{R}) dV, \quad (3.107)$$

и выделим в подинтегральном выражении полную дивергенцию. Поскольку такое выделение средствами векторного анализа неочевидно и выглядит как «подгонка под известный ответ», воспользуемся для этой цели физическими соображениями.

Поскольку электрический ток создают движущиеся заряды, то, считая их точечными, в (3.107) переходим от интегрирования к суммированию:

$$A \approx -\frac{1}{cR^3} \int \vec{j}(\vec{r}\vec{R}) dV = -\frac{1}{cR^3} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha}\vec{R}), \quad (3.108)$$

где индекс α перечисляет заряды величиной e_{α} , движущиеся со скоростями \vec{v}_{α} ; \vec{r}_{α} - их радиус – векторы. Здесь важно отметить, что при таком рассмотрении в стационарном случае необходимо проводить усреднение по времени, которое обозначается чертой сверху. Для проведения такого усреднения отметим, что, если движение зарядов финитно, то среднее значение полной производной по времени какой-либо физической величины равно нулю. Таким образом, вместо выделения полной дивергенции в (3.107) нам необходимо выделить полную производную по времени в (3.108). Поскольку $\vec{v}_{\alpha} = \dot{\vec{r}}_{\alpha}$, то

$$\frac{d}{dt} (e\vec{r}(\vec{r}\vec{R})) = e\vec{v}(\vec{r}\vec{R}) + e\vec{r}(\dot{\vec{v}}\vec{R}), \quad (3.109)$$

тогда, оставляя «симметричное» (точнее, антисимметричное) по \vec{v}_{α} и \vec{r}_{α} выражение, получаем

$$\begin{aligned} e\vec{v}(\vec{r}\vec{R}) &= \frac{1}{2} e\vec{v}(\vec{r}\vec{R}) + \frac{1}{2} e\vec{v}(\vec{r}\vec{R}) = \\ &= \frac{1}{2} e\vec{v}(\vec{r}\vec{R}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e\vec{r}(\vec{r}\vec{R})) - \frac{1}{2} e\vec{r}(\dot{\vec{v}}\vec{R}), \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e\vec{r}(\vec{r}\vec{R})) + \frac{1}{2} (e\vec{v}(\vec{r}\vec{R}) - e\vec{r}(\dot{\vec{v}}\vec{R})) \end{aligned} \quad (3.110)$$

и

$$\vec{A} \approx \frac{1}{2cR^3} \left[\sum_{\alpha} e_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}] \vec{R} \right], \quad (3.111)$$

где отброшено равное нулю среднее значение производной по времени и выделено двойное векторное произведение.

Вектор

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}] = \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \vec{j}] dV \quad (3.112)$$

называется магнитным моментом системы. Тогда в дипольном приближении

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m} \vec{R}]}{R^3}. \quad (3.113)$$

Зная векторный потенциал, найдем напряженность магнитного поля:

$$\vec{H} = \text{rot} \frac{[\vec{m} \vec{R}]}{R^3} = \text{rot} \left[\vec{m} \frac{\vec{R}}{R^3} \right] = \vec{m} \text{div} \frac{\vec{R}}{R^3} - (\vec{m} \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3}. \quad (3.114)$$

Вспоминая, что

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla \frac{1}{R}, \quad (3.115)$$

получаем

$$\text{div} \frac{\vec{R}}{R^3} = -\Delta \frac{1}{R} = 0 \text{ при } R \neq 0, \quad (3.116)$$

и учитывая, что

$$(\vec{m} \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{1}{R^3} (\vec{m} \nabla) \vec{R} + \vec{R} \left(\vec{m} \nabla \frac{1}{R^3} \right) = \frac{\vec{m}}{R^3} - \frac{3\vec{R}(\vec{m} \vec{R})}{R^5}, \quad (3.117)$$

окончательно получаем:

$$\vec{H} = \frac{3\vec{n}(\vec{m}\vec{n}) - \vec{m}}{R^3}, \quad (3.118)$$

где \vec{n} — снова единичный вектор в направлении \vec{R} . Мы видим, что магнитное поле выражается через магнитный момент такой же формулой, какой электрическое поле выражается через дипольный.

Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}] = \frac{e}{2mc} \sum_{\alpha} m [\vec{r}_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}]. \quad (3.119)$$

Если скорости всех зарядов $v \ll c$, то $m\vec{v}$ есть импульс \vec{p} заряда, и мы получаем:

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \sum_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}] = \frac{e}{2mc} \vec{L}, \quad (3.120)$$

где $\vec{L} = \sum_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}]$ есть механический момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно $e/2mc$.

Задача ([1].стр 144)

Определить отношение магнитного и механического моментов для системы из двух зарядов (скорости $v \ll c$).

Решение. Выбирая начало координат в центре инерции обеих частиц, будем иметь $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$ и $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$, где \vec{p} — импульс относительно движения, С помощью этих соотношений найдем:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{L} \quad (3.121)$$

- решение задачи

3.8. Теорема Лармора

Взаимодействие токов с внешним магнитным полем описывается аналогично электрическому полю (3.72)-(3.86). При этом, естественно, необхо-

димому учесть отсутствие в природе магнитных зарядов, то есть первый член взаимодействия токовых систем описывается как взаимодействие магнитных дипольных моментов. Качественно новое же явление возникает при рассмотрении движения заряженной частицы в магнитном поле.

Рассмотрим систему зарядов, находящуюся во внешнем постоянном однородном магнитном поле. Средняя по времени сила, действующая на систему,

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \sum e [\overline{\vec{v}\vec{H}}] = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \sum e [\overline{\vec{r}\vec{H}}], \quad (3.122)$$

обращается в нуль как среднее значение производной по времени от всякой величины, меняющейся в конечных пределах. Однако среднее значение момента сил

$$\vec{M} = \frac{1}{c} \sum e [\overline{\vec{r}[\vec{v}\vec{H}]}] \quad (3.123)$$

отлично от нуля. Его можно выразить через магнитный момент системы:

$$\vec{M} = \frac{1}{c} \sum e (\overline{\vec{v}(\vec{r}\vec{H}) - \vec{H}(\vec{r}\vec{v})}) = \frac{1}{c} \sum e \left(\overline{\vec{v}(\vec{r}\vec{H}) - \frac{1}{2} \vec{H} \frac{d}{dt} \vec{r}^2} \right). \quad (3.124)$$

При усреднении второй член обращается в нуль, так что

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \sum e (\overline{\vec{v}(\vec{r}\vec{H})}) + \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \sum e (\overline{\vec{r}(\vec{r}\vec{H})}) - \frac{1}{2c} \sum e (\overline{\vec{r}(\vec{v}\vec{H})}), \quad (3.125)$$

или окончательно

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \left[\sum e [\overline{\vec{r}\vec{v}}] \vec{H} \right] = [\vec{m}\vec{H}]. \quad (3.126)$$

Как и следовало ожидать, полная аналогия случая электрического поля в однородном электрическом поле.

Рассмотрим теперь влияние магнитного поля на движение заряженных частиц.

Функция Лагранжа системы зарядов во внешнем постоянном однородном магнитном поле содержит дополнительный (по отношению к функции Лагранжа замкнутой системы) член

$$L = \vec{A}\vec{v} = \sum \frac{e}{2c} [\vec{H}\vec{r}] \vec{v} = \sum \frac{e}{2c} [\vec{r}\vec{v}] \vec{H} \quad (3.127)$$

(мы воспользовались перестановочным свойством смешанного произведения и выражением $\vec{A} = [\vec{H}\vec{r}]/2$ для векторного потенциала однородного поля). Вводя магнитный момент системы, имеем:

$$L = \vec{m}\vec{H}. \quad (3.128)$$

Рассмотрим систему зарядов, совершающих финитное движение (со скоростями $v \ll c$) в центрально-симметричном электрическом поле, создаваемом некоторой неподвижной частицей.

Перейдем от неподвижной системы координат к системе, равномерно вращающейся вокруг оси, проходящей через неподвижную частицу. Согласно известной формуле скорость \vec{v} частицы в новой системе координат связана с ее же скоростью \vec{v}' в старой системе соотношением

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega}\vec{r}], \quad (3.129)$$

где \vec{r} — радиус-вектор частицы, а $\vec{\Omega}$ — угловая скорость вращающейся системы координат. В неподвижной системе функция Лагранжа системы зарядов есть

$$L = \sum \frac{mv'^2}{2} - U, \quad (3.130)$$

где U — потенциальная энергия зарядов во внешнем электрическом поле вместе с энергией их взаимодействия друг с другом. U является функцией от расстояний зарядов до неподвижной частицы и от их взаимных расстояний; при переходе к вращающейся системе координат она остается, очевидно, неизменной. Поэтому в новой системе функция Лагранжа будет

$$L = \sum \frac{m}{2} (\vec{v} + [\vec{\Omega}\vec{r}])^2 - U \approx \sum \frac{m\vec{v}^2}{2} + \sum m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] - U, \quad (3.131)$$

где мы пренебрегли членами порядка $[\vec{\Omega}\vec{r}]^2$.

Предположим, что у всех частиц отношение e/m зарядов к массам одинаково, и рассмотрим функцию Лагранжа этой системы в однородном магнитном поле напряженностью \vec{H} :

$$L = \sum \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e\vec{v}[\vec{H}\vec{r}] - U. \quad (3.132)$$

Мы видим, что при

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{2mc} \vec{H} \quad (3.133)$$

она совпадает с функцией Лагранжа (3.131) вращающейся системы отсчета.

Таким образом, в нерелятивистском случае поведение системы зарядов с одинаковыми отношениями e/m , совершающих финитное движение в центрально-симметричном электрическом поле и в слабом однородном магнитном поле \vec{H} , эквивалентно поведению этой же системы зарядов в том же электрическом поле в системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью (3.133). Это утверждение составляет содержание так называемой теоремы Лармора, а угловая скорость $\Omega = eH/2mc$ называется ларморовой частотой.

К этому же вопросу можно подойти с другой точки зрения. При достаточно слабом магнитном поле \vec{H} ларморова частота мала по сравнению с частотами финитного движения данной системы зарядов, и можно рассматривать относящиеся к этой системе величины, усредненные по временам, малым по сравнению с периодом $2\pi/\Omega$. Эти величины будут медленно (с частотой Ω) меняться со временем.

Рассмотрим изменение среднего механического момента системы \vec{L} . Согласно известному уравнению механики производная \vec{L} равна моменту действующих на систему сил \vec{M} . Поэтому имеем:

$$\frac{d}{dt} \bar{\vec{L}} = \bar{\vec{M}} = [\bar{\vec{m}}\vec{H}]. \quad (3.134)$$

Если отношение e/m для всех частиц в системе одинаково, то механический и магнитный моменты пропорциональны друг другу. Тогда

$$\frac{d}{dt} \bar{\vec{L}} = -[\bar{\vec{\Omega}}\bar{\vec{L}}]. \quad (3.135)$$

Это уравнение означает, что вектор \vec{L} (а с ним и магнитный момент \vec{m}) вращается с угловой скоростью $-\Omega$ вокруг направления поля, сохраняя при этом свою абсолютную величину и угол, образуемый им с этим направлением. Это явление называется ларморова прецессия.

Контрольные вопросы

1. Записать уравнения Максвелла для электростатики.
2. Записать закон Кулона.
3. Почему магнитное поле можно считать «фиктивным» полем?
4. Как выглядит электрическое поле быстро движущегося заряда?
5. Что такое дипольный момент? Запишите его в виде интеграла.
6. Напишите выражения для потенциала и поля диполя.
7. При каких условиях квадрупольный момент не зависит от выбора начала координат?
8. Что такое мультипольное разложение?
9. Чему равна потенциальная энергия диполя во внешнем поле?
10. Записать уравнения Максвелла для магнитостатики.
11. В чем состоят отличия мультипольного разложения в магнитостатике от аналогичного в электростатике?
12. Запишите выражение для магнитного момента через механический.
13. Что такое Ларморова прецессия?

Глава 4. Электромагнитные волны

4.1 Волновое уравнение

Нестационарные решения уравнений Максвелла $\vec{E}(t, \vec{r})$, $\vec{H}(t, \vec{r})$, без источников $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$ называются электромагнитными волнами в вакууме. Эти волновые поля описываются системой уравнений

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (4.1)$$

Правая часть второго уравнения $(1/c) \cdot \partial \vec{E} / \partial t$ называется ток смещения, эту величину Максвелл специально добавил в свои уравнения, чтобы обеспечить существование волновых решений. Волновые решения должны удовлетворять волновому уравнению или уравнению Даламбера. Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы вывести волновое уравнение из уравнений Максвелла без источников.

Это можно сделать двумя способами: либо в 3-мерном виде непосредственно из уравнений (4.1), либо переписать уравнения Максвелла в 4-мерном виде и выразить поля через 4-потенциал.

Первый способ. Применим операцию rot к первому и второму уравнениям в (4.1) и выразим $rot \vec{H}$ и $rot \vec{E}$ из второго и первого уравнений

$$rot \ rot \ \vec{E} = -\frac{1}{c} rot \ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} rot \ \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$rot \ rot \ \vec{H} = \frac{1}{c} rot \ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} rot \ \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Теперь, применим известное векторное тождество к полям \vec{E} и \vec{H}

$$rot \ rot \ \vec{E} = grad \ div \ \vec{E} - \Delta \vec{E}, \quad rot \ rot \ \vec{H} = grad \ div \ \vec{H} - \Delta \vec{H}.$$

Учитывая два последних уравнения $div \ \vec{E} = 0$ и $div \ \vec{H} = 0$ в (4.1), получим два волновых уравнения для полей $\vec{E}(t, \vec{r})$ и $\vec{H}(t, \vec{r})$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2)$$

Здесь Δ означает оператор Лапласа.

Второй способ. Если $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$, то равна нулю плотность тока, записанная в 4-мерном виде $J^\alpha = (c\rho, \vec{j}) = 0$. Тогда 4-мерное уравнение Максвелла с источниками $\partial F^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = -(4\pi/c)J^\alpha$ становится однородным $\partial F^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = 0$. Выразим в этом уравнении тензор электромагнитного поля $F^{\alpha\beta}$ через 4-потенциал $A^\alpha = (\varphi, \vec{A})$. Согласно определению $F^{\alpha\beta} = \partial A^\beta / \partial x_\alpha - \partial A^\alpha / \partial x_\beta$, тогда

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\beta} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} \right) = 0.$$

Свяжем 4-потенциал дополнительным условием, $\partial A^\beta / \partial x^\beta = 0$ — дивергенция 4-вектора $A^\alpha = (\varphi, \vec{A})$ равна нулю, которое называется калибровка Лоренца. Трехмерный вид этого условия: $(1/c)\partial\varphi/\partial t + div \ \vec{A} = 0$. В результате получим 4-мерную форму волнового уравнения для 4-потенциала

$$\frac{\partial^2 A^\gamma}{\partial x_\beta \partial x^\beta} \equiv g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 A^\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0, \quad (4.3)$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор, в декартовых координатах это диагональная матрица $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. В 3-мерном виде уравнение (4.3) переписывается как

$$\begin{aligned} \alpha = 0, \quad \Delta A^0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^0}{\partial t^2} = 0 &\Rightarrow \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \\ \alpha = 1, 2, 3, \quad \Delta A^\alpha - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial t^2} = 0 &\Rightarrow \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}$$

Итак, скалярный $\varphi(t, \vec{r})$ и векторный $\vec{A}(t, \vec{r})$ потенциалы тоже удовлетворяют волновому уравнению, значит и сами поля $\vec{E}(t, \vec{r})$ и $\vec{H}(t, \vec{r})$ должны описывать волны, поскольку они выражаются через потенциалы: $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - (1/c) \cdot \partial \vec{A} / \partial t$, $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$.

Волновое уравнение для потенциала $\vec{A}(t, x)$ можно получить сразу в 3-мерном виде, если использовать векторное тождество для операции $\text{rot rot } \vec{A}$ и частный случай калибровки Лоренца (см., например, [1], С.153).

4.2 Плоские волны

Если поля зависят только от одной пространственной переменной, например, $\vec{E}(t, x)$, $\vec{H}(t, x)$ или $\varphi(t, x)$, $\vec{A}(t, x)$, то такие поля описывают плоскую волну. Оператор Лапласа, в этом случае упрощается $\Delta \rightarrow \partial^2 / \partial x^2$, и мы получаем одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \quad (4.4)$$

Здесь функция $f(t, x)$ означает любую из компонент полей $\vec{E}(t, x)$, $\vec{H}(t, x)$ или потенциалов $\varphi(t, x)$, $\vec{A}(t, x)$.

Для решения (4.4) воспользуемся второй канонической формой одномерного уравнения Даламбера

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (4.5)$$

где $\xi = t - x/c$ и $\eta = t + x/c$ называются запаздывающим и опережающим аргументами соответственно, сама волновая функция зависит теперь от этих аргументов $f = f(\xi, \eta)$.

Общее решение (4.5) записывается как

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные функции своих аргументов. В итоге, мы можем записать общее решение волнового уравнения (4.4)

$$f = f_1(t - x/c) + f_2(t + x/c). \quad (4.6)$$

Функции $f_1(t - x/c)$ и $f_2(t + x/c)$ это два независимых решения уравнения (4.4). Функция $f_1(t - x/c)$ описывает волну бегущую вдоль оси x , а функция $f_2(t + x/c)$ описывает волну бегущую в противоположном направлении.

Рассмотрим частный случай запаздывающей волны, т.е. $f_2(t + x/c) = 0$. Калибровка Лоренца $(1/c)\partial\phi/\partial t + \text{div } \vec{A} = 0$ является инвариантной, т.е. одинаково записывается во всех ИСО. Однако если оставаться в одной инерциальной системе отсчета, то удобно вместо калибровки Лоренца использовать простое условие $\phi = 0$, $\text{div } \vec{A} = 0$ — кулоновскую калибровку. В одномерном случае слудует положить $A_x \equiv 0$, так мы отбрасываем не волновое решение вида $E_x = \text{const}$, (см., [1], С.157).

Теперь, электрическое и магнитное поля в плоской волне выражаются только через векторный потенциал

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}.$$

Учитывая выбор $A_x \equiv 0$, $\xi = t - x/c$ и что для плоской волны $\partial \vec{A} / \partial y \equiv 0$, $\partial \vec{A} / \partial z \equiv 0$ выразим операторы дифференцирования как

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Тогда $\text{rot } \vec{A} = [\nabla \vec{A}]$ можно выразить как

$$[\nabla\vec{A}]_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \equiv 0, [\nabla\vec{A}]_y = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \equiv 0, [\nabla\vec{A}]_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

В итоге, электрическое и магнитное поля в плоской волне имеют вид

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi}, \quad \vec{H} = -\frac{1}{c} \left[\vec{n} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi} \right], \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = [\vec{n} \vec{E}], \quad (4.7)$$

где \vec{n} — единичный вектор вдоль оси x , т.е. вдоль распространения волны. Из (4.7) видно, что $\vec{E} \perp \vec{n}$, $\vec{H} \perp \vec{n}$ и $\vec{E} \perp \vec{H}$, поэтому электромагнитные волны называют поперечными волнами. Для электромагнитных волн в вакууме, случай рассматриваемый здесь, выполняется условие $|\vec{E}| = |\vec{H}|$.

По определению вектор Умова-Пойнтинга $\vec{S} = c [\vec{E} \vec{H}] / 4\pi$ описывает плотность потока энергии и в плоской волне записывается как

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{E} [\vec{n} \vec{E}] \right] = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n}, \quad (4.8)$$

здесь учтено, что $(\vec{E} \cdot \vec{n}) = 0$ и тождество $[\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$. Из (4.8) следует, что поток энергии направлен вдоль распространения волны, в нашем случае вдоль оси x .

Плотность энергии электромагнитного поля, по определению, есть $W = (E^2 + H^2) / 8\pi$ и для плоской волны в вакууме $W = E^2 / 4\pi$, тогда вектор потока энергии можно представить как $\vec{S} = c W \vec{n}$.

Плотность импульса электромагнитного поля выражается, как \vec{S} / c^2 и равна так же $W \vec{n} / c$.

Поток импульса описывается тензором максвеловских напряжений, который выражается через пространственные компоненты тензора энергии-импульса как $\sigma^{ik} = -T^{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3$), знак минус берется по традиции, чтобы величина σ^{ik} совпадала по знаку с трехмерными аналогами как в гидродинамике или теории упругости. Для плоской волны отличная от нуля компонента тензора максвеловских напряжений есть $-\sigma_{xx} = T^{xx} = W$. Поток импульса направлен вдоль оси x и равен по величине плотности энергии.

Поскольку физические величины: плотность энергии, плотность потока энергии (плотность импульса) и плотность потока импульса, объединены в 4-мерный тензор энергии-импульса, то при переходе в другую ИСО они преобразуются как соответствующие компоненты симметричного тензора энергии-

импульса: $T^{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} T'^{\mu\nu}$. Матрица Лоренца Λ_{μ}^{α} описывает переход из штрихованной ИСО в нештрихованную ИСО, ее компоненты зависят от величины и направления относительной скорости.

4.3 Монохроматическая плоская волна

Пусть плоская электромагнитная волна описывается функциями $\vec{E}(t, x)$, $\vec{H}(t, x)$ или $\vec{A}(t, x)$, которые меняются со временем по гармоническому закону, т.е. волновая функция в (4.4) $f \propto \exp(i\omega t)$ и вторая производная по времени может быть переписана как $\partial^2 f / \partial t^2 = -\omega^2 f$. Тогда само волновое уравнение (4.4) принимает вид

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0. \quad (4.9)$$

В математической физике уравнение (4.9) известно как уравнение Гельмгольца. Мы рассматриваем частный случай плоской волны, когда $f = f(\xi)$, $\xi = t - x/c$, причем это монохроматическая волна, т.е. имеется только одна волна вида $f \propto \exp(i\omega t)$ с постоянной частотой ω .

Удобно представить векторный потенциал в комплексной форме $\vec{A}_0 \exp(-i\omega\xi)$, а физически наблюдаемый потенциал выражается через действительную часть этого комплексного потенциала

$$\vec{A} = \text{Re}[\vec{A}_0 \exp(-i\omega(t - x/c))],$$

где \vec{A}_0 — постоянный комплексный вектор, называемый так же комплексной амплитудой. Поля $\vec{E}(t, x)$ и $\vec{H}(t, x)$ будут выражаться через потенциал \vec{A} согласно (4.7) и зависеть от времени как \vec{A} .

С частотой ω связана физическая величина $\lambda = 2\pi c / \omega$, называемая длиной волны и волновой вектор $\vec{k} = \omega \vec{n} / c = 2\pi \vec{n} / \lambda$, где \vec{n} — единичный вектор, направленный вдоль распространения волны. Если ввести фазу волны, определяемую как $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$, комплексный потенциал можно переписать в виде

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \exp[-i\omega(t - x/c)], \quad (4.10)$$

Подстановка (4.10) в (4.7) дает

$$\vec{E} = ik \vec{A}, \quad \vec{H} = i [\vec{k} \vec{A}], \quad k \equiv |\vec{k}|.$$

Такое важное понятие как поляризация волны связано с направлением электрического поля в волне. Поэтому нужно выяснить, как направлено электрическое поле в плоской монохроматической волне.

Представим электрическое поле в комплексном виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)].$$

Перепишем комплексную амплитуду, как $\vec{E}_0 = \vec{b} \exp(i\alpha)$. Принято выбирать комплексный вектор $\vec{b} = \vec{b}_1 + i\vec{b}_2$ и фазу α , чтобы $(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2) = 0$, тогда

$$\vec{E} = \vec{b} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)].$$

Направим вектор \vec{b}_1 вдоль оси y , тогда компоненты электрического поля расположены в плоскости (y, z) и ортогональны вектору \vec{k} , который теперь расположен вдоль оси x . Сами компоненты поля \vec{E} запишем как

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \alpha), \quad E_z = \pm b_2 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \alpha), \quad (4.11)$$

здесь два знака перед величиной b_2 означают направление вектора \vec{b}_2 вдоль оси z или против нее. Исключив фазу из выражений (4.11) получим

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) показывает, что в любой точке пространства вектор электрического поля замечает эллипс. Такая монохроматическая волна называется эллиптически поляризованной. Если $b_1 = b_2$, то волна называется поляризованной по кругу. Если вращение вектора \vec{E} происходит против часовой стрелки вокруг вектора \vec{k} , то волна называется правополяризованной, если по часовой стрелке — то левополяризованной. Эти два случая отвечают двум знакам перед величиной b_2 в (4.11). Если $b_1 = 0$ или $b_2 = 0$, то волна называется линейно поляризованной или поляризованной в плоскости (x, y) или в плоскости (x, z) .

Фазу $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ можно представить как скалярное произведение двух 4-векторов: радиус-вектора $x^\alpha = (ct, x, y, z)$ и 4-вектора с компонентами $(\omega/c, \vec{k})$ этот вектор называется 4-мерным волновым вектором

$$k^\alpha = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right).$$

Если скорость волны равна скорости света в вакууме, то $k^\alpha k_\alpha = 0$. Если скорость волны меньше, чем скорости света в вакууме, то $k^\alpha k_\alpha > 0$.

Решение 4-мерного волнового уравнения (4.3) в виде монохроматической волны должно иметь вид

$$A^\gamma \propto \exp(-i k_\alpha x^\alpha).$$

Плотность энергии, вектор Умова-Пойнтинга и тензор максвеловских напряжений могут быть вычислены с помощью тензора энергии импульса плоской монохроматической волны

$$T^{\alpha\beta} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^\alpha k^\beta.$$

Преобразование компонент 4-вектора k^α при переходе в другую ИСО описывается формулой $k^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta k'^\beta$, где Λ^α_β — матрица Лоренца. Эта формула позволяет получить сразу преобразование частоты (эффект Доплера) и изменение направления вектора \vec{k} (абберация).

4.4 Сферические волны

Рассмотрим волновое уравнение для функции, зависящей от всех пространственных переменных $f(t, \vec{r})$

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (4.13)$$

Пусть функция f зависит от модуля вектора \vec{r} , т.е. обладает сферической симметрией $f(t, r)$, тогда в операторе Лапласа остается только радиальная часть и уравнение (4.13) переписывается как

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (4.14)$$

Сделаем подстановку $f(t, r) = u(t, r)/r$ в (4.14), тогда для функции $u(t, r)$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Это уравнение для плоских волн и его решение нам уже известно

$$u(t, r) = f_1(t - r/c) + f_2(t + r/c).$$

В результате получено общее решение уравнения (4.14)

$$f(t, r) = \frac{f_1(t - r/c)}{r} + \frac{f_2(t + r/c)}{r}. \quad (4.15)$$

Решение (4.15) известно как сферические волны. Два линейно независимых решения $f_1(t - r/c)/r$ и $f_2(t + r/c)/r$ называются запаздывающим и опережающим соответственно. Запаздывающее решение $f_1(t - r/c)/r$ описывает сферическую волну, расходящуюся от центра со скоростью c . Опережающее решение $f_2(t + r/c)/r$ описывает сферическую волну, сходящуюся к центру со скоростью c . Оба решения играют большую роль в математической физике и используются в качестве базиса для разложения произвольных решений на сферические составляющие. В природе обычно встречаются запаздывающие решения, так на большом удалении от пространственно ограниченного источника излучения (островной источник) волна стремится к сферически симметричному виду.

4.5 Общее решение неоднородного волнового уравнения

Неоднородные волновые уравнения для полей и потенциалов возникают, если рассмотреть уравнения Максвелла с источниками. Удобно сделать это в 4-мерной форме. Учитывая определение тензора электромагнитного поля $F^{\alpha\beta} = \partial A^\beta / \partial x_\alpha - \partial A^\alpha / \partial x_\beta$, выразим дивергенцию $F^{\alpha\beta}$ через 4-потенциал A^α

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\beta} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} \right).$$

Наложим на 4-потенциал дополнительное условие — калибровку Лоренца

$$\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\beta} = 0.$$

Тогда из уравнений Максвелла с источниками следует неоднородное волновое уравнение для 4-потенциала

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\alpha \Rightarrow \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x_\beta \partial x^\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\alpha.$$

А так же закон сохранения 4-тока

$$\frac{\partial^2 F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0.$$

В 3-мерном виде получаются два неоднородных волновых уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (4.16)$$

и дополнительные условия — калибровка Лоренца и уравнение неразрывности

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

В математической физике существует несколько методов решения неоднородных линейных уравнений в частных производных, наиболее распространен из них метод функций Грина. Суть метода заключается в том, чтобы представить распределенный источник ρ в виде суперпозиции (интеграла) точечных источников. Такие точечные источники описываются с помощью δ -функции Дирака. Решение G линейного уравнения с правой частью в виде δ -функции называется функцией Грина. Тогда решение линейного уравнения с произвольной правой частью ρ представляется в виде суперпозиции, т.е. объемного интеграла от произведения функции Грина на функцию источника $\int G\rho dV$. См., например, [1], [2].

Результат решения (4.16) принято записывать в следующем виде

$$\begin{aligned}\varphi(t, \vec{r}) &= \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} dx' dy' dz' + \varphi_0, \\ \vec{A}(t, \vec{r}) &= \frac{1}{c} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dx' dy' dz' + \vec{A}_0,\end{aligned}\tag{4.17}$$

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки измерения потенциалов φ и \vec{A} . $\vec{r}' = (x', y', z')$ — радиус-вектор элемента объема $dx' dy' dz'$, по которому распределен источник. $R = |\vec{R}|$ — расстояние от элемента объема $dx' dy' dz'$ до точки измерения потенциалов φ и \vec{A} .

Объемные интегралы в (4.17) называются запаздывающими потенциалами, величины φ_0 и \vec{A}_0 — решения однородных волновых уравнений.

Потенциалы φ_0 и \vec{A}_0 принято интерпретировать как внешнее поле, например, плоская волна, падающая на систему зарядов. Отклик системы на внешнее воздействие и есть запаздывающие потенциалы, как видно из (4.17) это суперпозиция сферических запаздывающих волн, расходящихся от каждой точки объема, по которому распределен источник.

Контрольные вопросы

1. Какие компоненты \vec{A} удовлетворяют волновому уравнению?
2. Какие компоненты \vec{E} и \vec{H} удовлетворяют волновому уравнению?
3. Удовлетворяет ли волновому уравнению скалярный потенциал?
4. Смысл двух независимых решений одномерного волнового уравнения?
5. Сколько степеней свободы нужно для учета поляризации плоской волны?
6. Перечислить типы поляризации плоской монохроматической волны.

Глава 5. Электромагнитные поля движущихся зарядов

5.1. Запаздывающие потенциалы

Факт конечности скорости передачи взаимодействия (скорости света) приводит к проблеме запаздывания сигнала и, в конечном счете, к введению запаздывающего времени $\tau = t - x/c$. Это эквивалентно смещению начала отсчета времени на величину, равную времени распространения электромагнитного сигнала из начальной точки в точку x .

С другой стороны, решениями уравнений Максвелла являются как напряженности электромагнитных полей, так и их потенциалы. Поэтому проблема тем более усложняется при нахождении полей и потенциалов движущихся зарядов.

Для решения этой задачи рассмотрим уравнения Максвелла с источником (см. к примеру [1])

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha. \quad (5.1)$$

Если теперь расписать тензор электромагнитного поля через 4-потенциалы

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu},$$

подставить в уравнения (5.1), наложить на потенциалы условия Лоренца

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0,$$

что в трехмерных обозначениях переписывается как

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0,$$

то уравнения (5.1) трансформируются в уравнение для потенциалов

$$g^{\beta\gamma} \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad (5.2)$$

где оператор

$$g^{\beta\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$$

есть оператор Д'Аламбера или д'аламбертиан, который позволяет записать уравнение (5.2) в трехмерном виде как два уравнения на потенциалы электромагнитного поля

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi \vec{j}; \quad (5.3)$$

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (5.4)$$

Эти уравнения для стационарных полей сводятся к уравнения Пуассона на потенциалы, а для переменных полей без источников к однородным волновым уравнениям.

В нашем случае неоднородных линейных уравнений (5.3) и (5.4) решение может быть представлено в виде суммы решений этих же уравнений без источников и частного решения уравнений с источниками. Для нахождения как раз частного решения разобьем все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом Δq , находящимся в одном из таких элементов объема. Из-за линейности уравнений истинное поле будет равно суперпозиции всех полей, создаваемых всеми такими зарядами.

Чтобы найти частное решение, начнем с уравнения (5.4). Для этого выберем начало координат в рассматриваемом маленьком объеме пространства и определим плотность электрического заряда как

$$\rho(\vec{R}, t) = \Delta q(t) \delta(\vec{R}),$$

где заряд Δq есть функция времени, \vec{R} – расстояние от выбранного начала, $\delta(\vec{R})$ – дельта функция Дирака.

Это означает, что теперь необходимо решить следующее уравнение:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \Delta q(t) \delta(\vec{R}). \quad (5.5)$$

Выбранная запись плотности заряда указывает на то, что заряд сосредоточен в очень малой области пространства, т.е. его можно в приближении считать точечным. Поэтому кроме начала координат справедливо однородное уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (5.6)$$

называемое уравнением Д'Аламбера.

В силу малости рассматриваемого объема можно считать его сферическим, а функцию φ зависящей от радиуса R . Тогда уравнение (5.6) в сферических координатах трансформируется в уравнение

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (5.7)$$

Допущение сферичности рассматриваемого заряженного объема позволяет записать потенциал φ в виде функции, обратно пропорциональной радиусу,

$$\varphi = \frac{\psi(R, t)}{R}.$$

Такой вид потенциала характерен для потенциала точечного заряда или вне заряженной сферы. Подставляя φ в (5.7), получим уравнение для плоской волны на функцию $\psi(R, t)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (5.8)$$

Решение такого уравнения может быть сразу выписано через суперпозицию функций запаздывающего и опережающего времени

$$\psi = f_1(t - R/c) + f_2(t + R/c). \quad (5.9)$$

Нам необходимо любое частное решение, поэтому оставим, исходя из физических соображений, связанных с принципом причинности, функцию f_1 из (5.9). В итоге потенциал φ принимает вид (вне начала координат)

$$\varphi = \frac{\psi(t - R/c)}{R}. \quad (5.10)$$

Функция ψ произвольна, поэтому можно подобрать ее таким образом, чтобы решение для потенциала (5.9) было справедливо и для области, занимаемой зарядом (в том числе и в начале координат). Другими словами, функция ψ должна удовлетворять уравнению (5.5). Однако в силу ограниченности волновой функции ψ плоской волны сам потенциал φ при $\vec{R} \rightarrow 0$ неограниченно возрастает, т.е. его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Поэтому в уравнении (5.5) вблизи начала координат можно пренебречь второй производной по времени $(1/c^2)\partial^2\varphi/\partial t^2$ по сравнению с действием лапласиана на потенциал $\Delta\varphi$. Следовательно, около начала координат получаем уравнение Пуассона с сингулярным источником, приводящее к закону Кулона. Это означает, что в каждый момент времени функция (5.10) в окрестности начала координат должна иметь вид

$$\varphi = \frac{\Delta q(t - R/c)}{R} = \frac{\Delta q(\tau)}{R}, \quad (5.11)$$

т.е. функция $\psi(\tau) = \Delta q(\tau)$, $\tau = t - R/c$ – запаздывающее время.

Для общего случая с произвольным распределением заряда в уравнении (5.4) представим Δq в (5.11) через объемную плотность заряда и элемент объема как $\Delta q = \rho dV$, а затем проинтегрируем по всему пространству

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{1}{R} \rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) dV' + \varphi_0, \quad (5.12)$$

где φ_0 – решение уравнения (5.4) без источника, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $\vec{r}' = (x', y', z')$, R – есть расстояние элемента объема dV до «точки наблюдения», в которой необходимо найти значение потенциала. Перепишем это выражение коротко как [1]

$$\varphi = \int \frac{\rho_\tau}{R} dV + \varphi_0, \quad (5.13)$$

где индекс τ есть запаздывающее время.

Подобным образом находится решение и для векторного потенциала, удовлетворяющего уравнению (5.3),

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_\tau}{R} dV + \vec{A}_0, \quad (5.14)$$

где \vec{A}_0 – решение уравнения (5.3) без правой части.

Полученные таким образом потенциалы (5.13) и (5.14) носят названия **запаздывающих потенциалов**. При этом φ_0 и \vec{A}_0 обычно отождествляют с внешним полем, действующим на систему.

5.2. Потенциалы Лиенара-Вихерта

Перейдем теперь к нахождению потенциалов поля, создаваемого точечным зарядом, совершающим заданное движение, описываемое законом движения $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$ [1].

Как мы видели в предыдущем параграфе, согласно выражениям для запаздывающих потенциалов электромагнитное поле в точке наблюдения $P(x, y, z)$ в момент времени t определяется состоянием движения заряда в предшествующий момент времени t' , для которого время распространения электромагнитного сигнала из точки нахождения заряда $\vec{r}_0(t')$ в точку наблюдения P как раз совпадает с разностью $t - t'$. Определим $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$ – радиус-вектор от заряда q в точку P , т.е. момент времени t' задается как

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t. \quad (5.15)$$

Таким образом, если в момент t' в некоторой системе отсчета, где заряд покоится (сопутствующая система отсчета), то электромагнитное поле в точке наблюдения в момент времени t задается просто кулоновским потенциалом

$$\varphi = \frac{q}{R(t')}, \quad \vec{A} = 0. \quad (5.16)$$

Согласно (5.15) выражение (5.16) для сопутствующей системы отсчета можно переписать как

$$\varphi = \frac{q}{c(t - t')}, \quad \vec{A} = 0. \quad (5.17)$$

Однако сопутствие означает равенство нулю относительной скорости $\vec{v} = 0$ заряда и наблюдателя. Поэтому необходимо обобщить выражения для потенциалов в произвольной системе отсчета. Далее заметим, что свертка 4-вектора $R^\alpha = (c(t-t'), \vec{r} - \vec{r}'(t))$ с 4-скоростью заряда $u^\alpha = dx^\alpha / ds$ дает $R_\alpha u^\alpha = c(t-t')$ в сопутствующей системе отсчета, где $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. Кроме того, справедливо $R_\alpha R^\alpha = 0$, т.е. вектор R^α является светоподобным. Это означает, что потенциал электрического поля в сопутствующей системе отсчета может быть представлен как

$$\varphi = q \frac{u^0}{R_\alpha u^\alpha}. \quad (5.18)$$

Естественное ковариантное обобщение, которое может быть сразу введено, это запись 4-потенциала в виде

$$A^\alpha = q \frac{u^\alpha}{R_\alpha u^\beta}. \quad (5.19)$$

Переписывая (5.19) в трехмерных обозначениях, получим известные потенциалы Лиенара-Вихерта

$$\varphi = \frac{q}{R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}}, \quad \vec{A} = \frac{q \vec{v}}{c(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c})}, \quad (5.20)$$

где \vec{R} – радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения P , а все величины в правых частях равенств (5.20) берутся в момент времени t' .

Для нахождения соответствующих напряженностей электрического и магнитного полей

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad (5.21)$$

Необходимо дифференцировать потенциалы (5.20) по координатам (x, y, z) и моменту времени t наблюдения, а соотношения для потенциалов Лиенара-

Вихерта суть функции от штрихованного времени t' . Поэтому для вычисления искомых производных следует вычислить сначала производные от t' .

Начнем с производной по t . Для этого продифференцируем соотношение (5.15), записав предварительно как $R(t') = c(t - t')$, по t

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\vec{R} \vec{v}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right), \quad (5.22)$$

где использовано при дифференцировании $\partial R / \partial t'$ тождество $R^2 = \vec{R}^2$ и подстановка $\partial \vec{R}(t') / \partial t' = -\vec{v}(t')$, минус появляется из-за того, что \vec{R} есть радиус-вектор от заряда q в точку P [1].

Из (5.22) находим

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \vec{v}}{cR}}. \quad (5.23)$$

Найдем теперь производные по координатам. Аналогичным образом продифференцируем то же самое соотношение (5.15)

$$\text{grad } t' = -\frac{1}{c} \text{grad } R(t') = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial R}{\partial t'} \text{grad } t' + \frac{\vec{R}}{R} \right). \quad (5.24)$$

В итоге получаем

$$\text{grad } t' = -\frac{\vec{R}}{c\left(R - \frac{\vec{R} \vec{v}}{c}\right)}. \quad (2.25)$$

Теперь с помощью этих формул можно вычислить напряженности электромагнитного поля, которые запишутся в виде

$$\vec{E} = q \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\vec{R} \vec{v}}{c}\right)^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R\right) + \frac{q}{c^2 \left(R - \frac{\vec{R} \vec{v}}{c}\right)^3} \left[\vec{R} \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R\right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t'} \right]\right]; \quad (5.26)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{R} [\vec{R}, \vec{E}], \quad (5.27)$$

где все величины в правых сторонах равенств берутся в момент t' .

Следует отметить, что электрическое поле (5.26) состоит из двух частей с различным асимптотическим поведением на больших расстояниях. Первый член зависит только от скорости частицы и на больших расстояниях меняется как $1/R^2$, т.е. как кулоновское поле, а точнее, это есть поле равномерно движущегося заряда. Второй член зависит от ускорения и убывает на больших расстояниях как $1/R$, т.е. как поле волны, т.к. этот член связан с излучаемыми частицей электромагнитными волнами. Что касается магнитного поля, то в этом общем случае по сравнению с равномерно движущимся зарядом, оно также оказывается всегда перпендикулярным к электрическому.

Контрольные вопросы

1. Что такое запаздывающее время? Его физический смысл.
2. Что такое запаздывающие потенциалы? Их физический смысл.
3. Что описывают потенциалы Лиенара-Вихерта?
4. Записать уравнения электромагнитного поля для потенциалов.

Глава 6. Теория излучения

6.1 Поле системы зарядов на далеких расстояниях

Пусть поле создается системой, движущихся зарядов. Решения в виде запаздывающих потенциалов (4.17) можно упростить, если рассматривать поле на расстояниях много больших, чем размеры самой системы зарядов.

Поместим начало координат O внутри системы. Радиус-вектор из точки O в точку P , где наблюдается поле, обозначим, как \vec{R}_0 , а единичный вектор в этом направлении обозначим как \vec{n} , т.е. $\vec{R}_0 = \vec{n} \cdot R_0$. Радиус-вектор из точки O в точку элемента заряда $de = \rho dV$ обозначим как \vec{r} . Вектор от элемента de в точку P обозначим как \vec{R} , т.е. $R = |\vec{R}_0 - \vec{r}|$.

На больших расстояниях от системы зарядов $R_0 \gg r$, тогда

$$(\vec{R}_0 - \vec{r})^2 = R_0^2 + r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R}_0 \approx R_0^2(1 - 2\vec{r} \cdot \vec{n} / R_0), \quad \sqrt{1 - 2\vec{r} \cdot \vec{n} / R_0} \approx 1 - \vec{r} \cdot \vec{n} / R_0.$$

учитывая это, запишем величину R как $\sqrt{(\vec{R}_0 - \vec{r})^2}$ или

$$R = |\vec{R}_0 - \vec{r}| \approx R_0 - \vec{r} \cdot \vec{n}.$$

Подставим это в (4.17). В знаменателе R_0 можно считать постоянной величиной и вынести за знак интеграла. В аргументе величину $t - R/c$ следует переписать, как $t - R_0/c + \vec{r} \cdot \vec{n} / c$, последним слагаемым пренебрегать нельзя, если только функции ρ и \vec{j} не остаются постоянными за время порядка $\vec{r} \cdot \vec{n} / c$. Окончательно получим результат

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{R_0} \iiint \rho(\vec{r}', t - R_0/c + \vec{r} \cdot \vec{n} / c) dx' dy' dz', \\ \vec{A} &= \frac{1}{cR_0} \iiint \vec{j}(\vec{r}', t - R_0/c + \vec{r} \cdot \vec{n} / c) dx' dy' dz'. \end{aligned} \tag{6.1}$$

На больших расстояниях от системы волна асимптотически стремится сферической форме. Малый участок сферы можно рассматривать как плоскую площадку, если при этом R_0 много больше, чем длина волны, то саму волну можно рассматривать как плоскую. Области электромагнитного излучения, где выполняются эти условия, называются волновой зоной.

Электрическое и магнитное поля в волновой зоне связаны формулой $\vec{E} = [\vec{H}, \vec{n}]$. Магнитное поле $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$, а сам векторный потенциал вычисляется как в плоской волне. В результате имеем

$$\vec{H} = \frac{1}{c} [\dot{\vec{A}} \vec{n}], \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} [\vec{n} [\dot{\vec{A}} \vec{n}]] = -\frac{\dot{\vec{A}}}{c} + \frac{\vec{n}}{c} (\dot{\vec{A}} \cdot \vec{n}). \quad (6.2)$$

Здесь $\dot{\vec{A}}$ означает дифференцирование по времени.

Согласно формулам (6.1) и (6.2) поля на больших расстояниях убывают по закону $1/R_0$. Вектор Пойнтинга для плоской волны равен $\vec{S} = \vec{n} c H^2 / 4\pi$.

Количество энергии, излучаемое в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$ называется интенсивность излучения и описывается формулой

$$dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\Omega. \quad (6.3)$$

Закон убывания поля на больших расстояниях $H \propto 1/R_0$. Получается, что интенсивность dI не зависит от расстояния, а зависит только от запаздывающего аргумента $t - R_0/c$. Подробности о спектральных свойствах излучения на больших расстояниях см. в [1].

6.2 Дипольное излучение

В формулах (6.1) время в аргументах функций ρ и \vec{j} входит в комбинации $t - R_0/c + \vec{r} \cdot \vec{n}/c$. Когда можно пренебречь величиной $\vec{r} \cdot \vec{n}/c$? Это можно сделать, если длина, излучаемой волны много больше, чем характерный размер системы $\lambda \gg \ell$. Это утверждение эквивалентно требованию $v \ll c$, где v — характерная скорость зарядов.

Для определения полей в плоской волне достаточно вычислить векторный потенциал, который теперь с учетом требований $\lambda \gg \ell$ и $v \ll c$ имеет вид

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \iiint \vec{j}(\vec{r}', t - R_0/c) dx' dy' dz'.$$

Полагая $\vec{j} = \rho \vec{v}$, перепишем векторный потенциал как $\vec{A} = \sum e \vec{v} / cR_0$, где сумма берется по всем заряженным частицам. Поскольку

$\sum e\vec{v} = \frac{d}{dt}(\sum e\vec{r}) = \dot{\vec{d}}$, здесь вектор $\vec{d} = \sum e\vec{r}$ — дипольный момент системы. В результате имеем

$$\vec{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\vec{d}} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\vec{d}} \vec{n}], \quad \vec{E} = \frac{1}{c^2 R_0} [[\ddot{\vec{d}} \vec{n}] \vec{n}]. \quad (6.4)$$

Поля в (6.4) вычислены согласно (6.2).

Электромагнитное излучение, в данном приближении, выражается через вторую производную по времени от дипольного момента, поэтому такое излучение называется дипольным. Принято говорить так же об излучении в дипольном приближении. Из формулы $\dot{\vec{d}} = \sum e\vec{v}$ следует, что дипольное излучение возможно, если заряды движутся с ускорением.

Интенсивность дипольного излучения согласно (6.3) описывается формулой

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{d}} \vec{n}]^2 d\Omega = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (6.5)$$

Согласно (6.5) угловое распределение излучения пропорционально $\sin^2 \theta$. Учитывая, что $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ и интегрируя (6.5) по $d\theta$ от 0 до π , получим полное дипольное излучение:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2. \quad (6.6)$$

Так полное излучение одиночного заряда есть $I = 2e^2 a^2 / 3c^3$. Если замкнутая система состоит из частиц с одинаковым отношением заряда к массе, например, частицы одного сорта, то дипольное излучение такой системы равно нулю. Это следует из определения $\vec{d} = \sum e\vec{r} = \sum (e/m) m\vec{r} = (e/m) \sum m\vec{r}$. Радиус центра масс у замкнутой системы в нерелятивистском приближении $v \ll c$ движется равномерно.

6.3 Квадрупольное и магнито-дипольное излучения

Если дипольное излучение невозможно, то необходимо учитывать следующие порядки малости при вычислении векторного потенциала в (6.1). Введем удобное обозначение для запаздывающего времени $t' \equiv t - R_0/c$, тогда

векторный потенциал в (6.1) можно разложить в ряд по степеням малой величины $\vec{r} \cdot \vec{n} / c$

$$\vec{A} = \frac{1}{c R_0} \iiint \vec{j}(\vec{r}', t' + \vec{r} \cdot \vec{n} / c) dx' dy' dz' \approx$$

$$\frac{1}{c R_0} \iiint \vec{j}(\vec{r}', t') dx' dy' dz' + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \iiint (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') dx' dy' dz'.$$

Полагая $\vec{j} = \rho \vec{v}$, перепишем векторный потенциал как

$$\vec{A} = \frac{1}{c R_0} \sum e \vec{v} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \sum e \vec{v} (\vec{r} \cdot \vec{n}).$$

Преобразуем произведение во втором слагаемом

$$\vec{v}(\vec{r} \cdot \vec{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t'} \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2} \vec{v}(\vec{r} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} \vec{r}(\vec{v} \cdot \vec{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t'} \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{n}) + \frac{1}{2} [[\vec{r} \vec{v}] \vec{n}].$$

Тогда векторный потенциал перепишется как

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{c R_0} + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \sum e \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{n}) + \frac{1}{c R_0} [\dot{\vec{m}} \vec{n}],$$

где $\vec{m} = \sum e [\vec{r} \vec{v}] / 2c$ — магнитный момент системы. Поля выражаются через векторный потенциал как $[\dot{\vec{A}} \vec{n}]$, поэтому к \vec{A} можно прибавить любой вектор пропорциональный \vec{n} , поля при этом не изменятся. Сделаем подстановку $\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{n}) \rightarrow \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{n}) - \vec{n} r^2 / 3$. Выражение $D_{ik} = \sum e (3x_i x_k - \delta_{ik} r^2)$ называется тензор квадрупольного момента. Введем вектор \vec{D} , компоненты которого есть $D_i = \sum_k D_{ik} n_k$, тогда для векторного потенциала получим окончательное выражение

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{c R_0} + \frac{1}{6c^2 R_0} \ddot{\vec{D}} + \frac{1}{c R_0} [\dot{\vec{m}} \vec{n}]. \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (6.2) получим формулы для полей

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{c^2 R_0} \left([\ddot{d} \vec{n}] + \frac{1}{6c} [\ddot{D} \vec{n}] + [[\ddot{m} \vec{n}] \vec{n}] \right), \\ \vec{E} &= \frac{1}{c^2 R_0} \left([[\ddot{d} \vec{n}] \vec{n}] + \frac{1}{6c} [[\ddot{D} \vec{n}] \vec{n}] + [\vec{n} \ddot{m}] \right).\end{aligned}\quad (6.8)$$

Подстановка (6.8) в (6.3) дает интенсивность излучения в телесный угол dI . Если усреднить это по всем направлениям, то получим полное излучение, см., например, [1]:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{ik}^2 + \frac{2}{3c^2} \ddot{m}^2. \quad (6.9)$$

Три слагаемых в (6.9) называются соответственно дипольным, квадрупольным и магнито-дипольным излучениями. Магнито-дипольное и дипольное излучения отсутствуют у замкнутых систем с частицами одного сорта.

6.4. Излучение быстро движущегося заряда

Ранее было получено выражение (6.6), что мощность излучения заряженной частицы в нерелятивистском случае пропорциональна квадрату ускорения частицы. Полный же излучаемый ею импульс в той же системе отчета равен нулю, т.к. излучение импульса как интеграл от плотности потока импульса в поле излучения по замкнутой поверхности, охватывающую частицу. Однако в силу свойств симметрии дипольного излучения импульсы, уносимые в противоположных направлениях, одинаковы по величине и противоположны по направлению, что и приводит к нулевому результату.

При переходе к произвольно движущейся системе отчета необходимо предыдущие результаты обобщить на четырехмерную запись. Следует при этом учесть, что в сопутствующей системе отчета (там, где частица покоится) пространственные компоненты 4-скорости u^α равны нулю, а квадрат 4-ускорения $w^\alpha = du^\alpha / ds$ есть инвариант, пропорциональный квадрату 3-ускорения $w \equiv a$

$$w^\alpha w_\alpha = -\frac{w^2}{c^4}. \quad (6.10)$$

Поэтому пространственные компоненты излучаемого 4-импульса dP^α обращаются в нуль, а временная совпадает с выражением

$$dE = \frac{2q^2}{3c^3} w^2 dt. \quad (6.11)$$

Это позволяет записать

$$dP^\alpha = -\frac{2q^2}{3c} g_{\beta\gamma} \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} dx^\alpha = -\frac{2q^2}{3c} g_{\beta\gamma} \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} u^\alpha ds. \quad (6.12)$$

Воспользуемся уравнениями движения в 4-мерной формулировке

$$mc \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{q}{c} F^\alpha{}_\beta u^\beta, \quad (6.13)$$

и перепишем (6.12) через тензор электромагнитного поля, исключив 4-ускорение. После этого, проинтегрировав полученное выражение, найдем полное излучение 4-импульса за время пролета частицы через данное электромагнитное поле

$$\Delta P^\alpha = -\frac{2q^4}{3m^2 c^5} \int g_{\beta\gamma} F^\beta{}_\delta u^\delta F^\gamma{}_\varepsilon u^\varepsilon dx^\alpha. \quad (6.14)$$

Временная компонента соотношения (6.14) и есть полное излучение энергии ΔE , которая может быть записана в через трехмерные величины как

$$\Delta E = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 - \frac{[\vec{v}, \vec{w}]}{c^2}}{(1 - \frac{v^2}{c^2})} dt = \int_{-\infty}^{\infty} I dt, \quad (6.15)$$

где $\vec{w} = d\vec{v}/dt$ – ускорение частицы,

$$I = \frac{2q^4}{3m^2 c^3} \frac{\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}]\}^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{E}, \vec{v})^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})}. \quad (6.16)$$

Из полученного выражения (6.16) видно, что при скоростях близких к скорости света, полное излучение энергии в единицу времени пропорционально квадрату энергии движущейся частицы, т.е. зависит от скорости как

$1/(1 - \frac{v^2}{c^2})$. Однако при движении в электрическом поле параллельно направлению поля будем иметь исключение.

6.5. Рассеяние свободными зарядами

При падении на систему электрических зарядов электромагнитной волны сами заряды приходят в движение, которое сопровождается излучением во все стороны, т.е. происходит **рассеяние** первоначально падающей волны.

Рассеяние обычно характеризуют отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени к плотности потока энергии падающего на систему излучения. Это отношение имеет размерность площади и носит название **эффективного сечения рассеяния** [1].

Если при падении на систему зарядов волны с вектором Пойнтинга \vec{S} излучаемая системой энергия в телесный угол $d\Omega$ за единицу времени есть dI , то сечение рассеяния (в телесный угол) равно

$$d\sigma = \frac{\langle dI \rangle}{S}, \quad (6.17)$$

где $\langle dI \rangle$ обозначено усреднение по времени. Полное сечение рассеяния есть интеграл по всем направлениям от (6.17).

Пусть имеется один неподвижный свободный заряд. Рассмотрим рассеяние, когда на этот заряд падает плоская монохроматическая линейно поляризованная электромагнитная волна. Напряженность электрического поля волны запишем в виде

$$\vec{E} = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha). \quad (6.18)$$

Практически скорость, приобретаемая зарядом под действием электромагнитной волны, много меньше скорости света, поэтому можно принять силу, действующую на заряд, равной $q\vec{E}$, а лоренцевой силой $\frac{q}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$ со стороны магнитного поля можно пренебречь. При этом пренебрегаем и влиянием смещения заряда при его колебаниях под влиянием электрического поля.

Поместим начало координат в точку, около которой заряд совершает колебания. Тогда в (6.18) исчезнет член $\vec{k} \cdot \vec{r}$ и можно считать, что на заряд все время действует поле

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \alpha). \quad (6.19)$$

При принятых допущениях уравнение движения заряда записывается как

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E}, \quad (6.20)$$

а с учетом, что дипольный момент заряда есть $\vec{d} = q \vec{r}$, уравнение (6.20) переписывается в виде

$$\frac{d^2 \vec{d}}{dt^2} = \frac{q^2}{m} \vec{E}. \quad (6.21)$$

В принятом приближении воспользуемся выражением (6.5), учитывая при этом, что частота рассеянной зарядом волны равна частоте падающей.

После подстановки (6.21) в (6.5) получаем

$$dI = \frac{q^4}{4\pi m^2 c^3} [\vec{E}, \vec{n}']^2 d\omega, \quad (6.22)$$

где \vec{n}' – единичный вектор в направлении рассеяния.

Для падающей волны величина вектора Пойнтинга равна

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2. \quad (6.23)$$

В результате получаем сечение рассеяния в телесный угол $d\omega$, не зависящее от частоты,

$$d\sigma = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta d\omega, \quad (6.24)$$

где θ – угол между направлением рассеяния и направлением вектора напряженности электрического поля падающей волны.

Чтобы найти полное сечение рассеяния выберем направление вектора \vec{E} в качестве полярной оси. Это означает, что $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Интегрируя по θ от 0 до π и по φ от 0 до 2π , получаем **формулу Томсона**

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2. \quad (6.25)$$

Контрольные вопросы

1. Как называются частные решения неоднородного волнового уравнения?
2. Существует ли дипольное излучение от электронного газа?
3. Существует ли чисто квадрупольное излучение?
4. Существует ли чисто магнитодипольное излучение?
5. Может ли излучать заряд движущийся равномерно и прямолинейно?
6. Чему пропорциональна мощность излучения ускоренного заряда?
7. Что такое сечение рассеяния?
8. Записать формулу Томсона и дать физическую интерпретации.

Глава 7. Спектральные представления электромагнитного поля

В этой главе мы сформулируем основные результаты классической электродинамики в виде, удобном для перехода к квантовой теории[1].

7.1 Собственные колебания поля

Рассмотрим электромагнитное поле в отсутствие зарядов в конечном объеме V , который предположим в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами L_1, L_2, L_3 . Все поля можно разложить в трехмерный ряд Фурье, например векторный потенциал

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (7.1)$$

Здесь компоненты вектора \vec{k} принимают дискретный ряд значений

$$k_x = 2\pi n_x / L_1, \quad k_y = 2\pi n_y / L_2, \quad k_z = 2\pi n_z / L_3,$$

n_x, n_y, n_z - произвольные целые числа. Из условия вещественности вектор-потенциала

$$\vec{A}^+ = \sum_k a_k^+ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}^+ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{A}$$

следует $\vec{a}_{-\vec{k}}^+ = \vec{a}_{\vec{k}}^+$. Из калибровки Ландау $div \vec{A} = 0$ следует $\vec{k} \cdot \vec{a}_{\vec{k}} = 0$, то есть поле $\vec{a}_{\vec{k}}$ перпендикулярно волновому вектору \vec{k} (поперечная волна). Из волнового уравнения следует

$$\ddot{\vec{a}}_{\vec{k}} + c^2 k^2 \vec{a}_{\vec{k}} = 0. \quad (7.2)$$

Решение уравнения (7.2) имеет вид $\vec{a}_{\vec{k}}(t) = \vec{a}_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t}$, где $\omega_k = ck$. Чтобы явно выделить бегущие волны, перегруппируем слагаемые в (7.1) следующим образом

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \left(\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{a}_{-\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) = \sum_{\vec{k}} \left(\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{a}_{\vec{k}}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right). \quad (7.3)$$

В первом слагаемом (7.3) волна имеет вид $\exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)$, во втором $\exp i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})$. Оба слагаемых есть функция от $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t$ и соответствует волне, бегущей вдоль вектора \vec{k} .

Напряженность электрического поля равна

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\vec{k}} \left(\dot{\vec{a}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \dot{\vec{a}}_{\vec{k}}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) = i \sum_{\vec{k}} k \left(\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \vec{a}_{\vec{k}}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right). \quad (7.4)$$

Аналогично находим напряженность магнитного поля $\vec{H} = rot \vec{A}$.

$$\vec{H} = i \sum_{\vec{k}} \left(\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - (\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}}^+) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right). \quad (7.5)$$

Энергия поля

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \int (H^2 + E^2) dV$$

может быть представлена в виде

$$\varepsilon = \frac{v}{4\pi} \sum_{\vec{k}} \left[k^2 \vec{a}_{\vec{k}} \times \vec{a}_{\vec{k}}^+ + (\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}}) \cdot (\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}}^+) \right]. \quad (7.6)$$

Так как поле поперечно, то $\vec{k} \cdot \vec{a}_{\vec{k}} = 0$ и $|\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}}| = ka_k$. В результате

$$\varepsilon = \frac{v}{2\pi} \sum_k k^2 a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ = \sum_k \varepsilon_k, \quad (7.7)$$

где $\varepsilon_k = \frac{v}{2\pi} k^2 a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+$ - есть энергия одной плоской волны. Поскольку волновое уравнение (7.2) для амплитуд \vec{a}_k совпадает с уравнением осциллятора с частотой $\omega_k = ck$, то представление поля (7.3-7.5) есть разложение поля в виде набора линейных осцилляторов, каждый из которых обладает энергией $\varepsilon_k \sim k^2$.

7.2. Спектральное разложение электростатического поля.

Спектральное представление, описанное в предыдущем разделе, относилось к полю в пустом пространстве без зарядов. Это поле можно представить как совокупность осциллирующих колебаний с волновым вектором \vec{k} и частотой $\omega_k = ck$. Можем ли мы представить в виде осцилляторов поле, созданное зарядами, в частности электростатическое поле? Такое поле уже не является решением волнового уравнения. Поэтому для плоских волн, на которые можно разложить поле зарядов, не выполняется закон дисперсии $\omega_k = ck$. Как мы покажем ниже, частота таких волн $\omega = 0$, хотя они и характеризуются волновым вектором \vec{k} .

Рассмотрим точечный заряд в начале координат. Потенциал созданного им поля определяется уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\vec{r}). \quad (7.8)$$

Разложим $\varphi(\vec{r})$ в интеграл Фурье

$$\varphi(\vec{r}) = \int \varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}, \quad \varphi_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r}.$$

Фурье-образ $\Delta\varphi$ равен

$$(\Delta\varphi)_{\vec{k}} = -k^2 \varphi_{\vec{k}}.$$

Фурье-образ правой части уравнения (7.8) равен

$$-\pi e \int \delta(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{(2\pi)^3} = -\frac{e}{2\pi^2}.$$

В результате находим

$$\varphi_{\vec{k}} = \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2}. \quad (7.9)$$

Разлагая напряженности поля \vec{E} в интеграл Фурье

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \vec{E}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}$$

и вычисляя

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{\nabla} \int \varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} = -i \int \vec{k} \varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k},$$

находим

$$\vec{E}_{\vec{k}} = -i\vec{k} \varphi_{\vec{k}} = -i \frac{\vec{k}}{k^2} \frac{e}{2\pi^2}. \quad (7.10)$$

Формулы (7.9) и (7.10) описывают электростатическое поле в виде плоских волн с нулевой частотой. Заметим, что поле $\vec{E}_{\vec{k}} \parallel \vec{k}$, то есть это продольное поле в отличие от поперечного поля электромагнитной волны в вакууме.

7.3. Спектральное представление запаздывающих потенциалов.

Разложим поле движущихся зарядов в интеграле Фурье

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \varphi_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \int \vec{A}_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (7.11)$$

Аналогично разложим плотность заряда и тока, их фурье-образы ρ_{ω} и \vec{j}_{ω} . Из общего выражения для запаздывающих потенциалов следует

$$\varphi_{\omega} e^{-i\omega t} = \int \rho_{\omega} \frac{e^{-i\omega t} (t - R/c)}{R} d\vec{r}', \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (7.12)$$

Вводя волновой вектор $k = \omega/c$, из (7.12) находим

$$\varphi_{\omega} = \int \rho_{\omega} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{R} dV, \quad \vec{A}_{\omega} = \frac{1}{c} \int j_{\omega} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{R} dV. \quad (7.13)$$

Заметим, что фурье-образ φ_{ω} является решением обобщенного уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi_{\omega} + k^2 \varphi_{\omega} = -4\pi \rho_{\omega} \quad (7.14)$$

Поскольку ρ_{ω} с помощью обратного преобразования Фурье равно

$$\rho_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt,$$

то окончательное спектральное представление для запаздывающего потенциала имеет вид

$$\varphi_{\omega}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dV \frac{\rho}{R} e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{R})}. \quad (7.15)$$

В частности, для одного точечного заряда $\rho(\vec{r}, t) = e\delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$.

Спектральные представления в этом случае принимают вид

$$\varphi_{\omega}(\vec{r}) = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t)} e^{i\omega[t + \vec{R}(t)/c]} dt, \quad \vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{r}', \quad (7.16)$$

аналогично,

$$\vec{A}_{\omega}(\vec{r}) = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{v}(t)}{R(t)} e^{i\omega[t + \vec{R}(t)/c]} dt, \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}'(t). \quad (7.17)$$

Таким образом, поле представляется в виде расходящейся сферической волны.

Контрольные вопросы

1. С какой целью вводится спектральное представление в электродинамике?
2. Является ли электростатический потенциал решением волнового уравнения?

3. В каком случае электромагнитное поле может быть представлено в виде набора свободных осцилляторов

ЧАСТЬ II. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Глава 1. Макроскопические уравнения Максвелла

1.1. Уравнения Максвелла для сплошных сред

Обобщая опыт предшественников, Максвелл постулировал для описания электромагнитных свойств сплошных сред следующие уравнения [2]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{нов.}}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В отличие от уравнений теории поля для микроскопических частиц, в сплошных средах необходимо ввести 2 вектора для описания электрической компоненты поля и 2 — для магнитной. Наряду с напряженностями \vec{E} и \vec{H} в теорию входят также электрическая индукция \vec{D} и магнитная индукция \vec{B} . Причина появления двух новых векторов заключается в возможном упорядочении микроскопических электрических дипольных моментов и микроскопических магнитных моментов частиц вещества. Для описания такого упорядочения введем вектора электрической поляризации \vec{P} и намагниченности \vec{M} ,

$$\vec{P} = \left\langle \sum_a e_a \vec{r}_a \right\rangle, \quad \vec{M} = \left\langle \frac{1}{2c} \sum_a e_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a \right\rangle. \quad (1.2)$$

Здесь условные скобки означают усреднение по бесконечно-малому физическому объему, которое будет подробно обсуждаться в следующем разделе. Связь между векторами индукции и напряженности в системе СГС определяется так:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}. \quad (1.3)$$

Рассматривая напряженности \vec{E} и \vec{H} как внешнее воздействие, а индукции как отклик системы на внешнее воздействие, можно записать материальные соотношения

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.4)$$

где ϵ и μ есть диэлектрическая и магнитная проницаемость, σ - электрическая проводимость. В отличие от точных определений (1.3), соотношения (1.4) имеют ограниченную область применимости. Во-первых, они справедливы в общем случае при малых полях (к ним возможны нелинейные поправки по \vec{E} или \vec{H}); во-вторых, запись (1.4) справедлива только для изотропных сред, в третьих, для переменных полей условия (1.4) заменяются аналогичными условиями для Фурье-образов. Более подробно все эти ограничения будут рассмотрены ниже в других главах.

1.2. Вывод макроскопических уравнений Максвелла из микроскопических

Мы знаем, что всякая сплошная среда как конденсированная система состоит из большого числа молекул и атомов, которые формируются из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов. Эти микроскопические заряды, число которых для сплошной среды велико (порядка числа Авогардо N_A), порождают микроскопическое электрическое $\vec{E}_{\text{микро}}$ и магнитное $\vec{H}_{\text{микро}}$ поле. Мы знаем также (см. Часть I), что микроскопические уравнения Максвелла могут быть получены из принципа наименьшего действия и имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{H}_{\text{микро}} &= 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{микро}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_{\text{микро}}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E}_{\text{микро}} &= 4\pi \rho_{\text{микро}}, \quad \operatorname{rot} \vec{H}_{\text{микро}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_{\text{микро}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{микро}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\rho_{\text{микро}}$ и $\vec{j}_{\text{микро}}$ есть микроскопические плотности заряда и тока, созданные микроскопическими зарядами электронов и атомных ядер. Число слагаемых в $\rho_{\text{микро}}$ и $\vec{j}_{\text{микро}}$ велико, порядка N_A , соответственно микроскопические напряженности $\vec{E}_{\text{микро}}$ и $\vec{H}_{\text{микро}}$ зависят от совокупности координат всех микроскопических зарядов.

Очевидно, что микроскопическое описание сплошной среды избыточно [23]. В самом деле, когда мы смотрим на экран телевизора, на циферблат электронных часов или следим за поворотом стрелки компаса, нас совершенно не интересуют координаты отдельных электронов и протонов, нам важны другие, макроскопические переменные. Для введения этих переменных определим понятие бесконечно малого физического объема в пространстве и времени. Пусть $f(x, y, z, t)$ есть любая из микроскопических функций, входящих в (1.5). Бесконечно малый физический объем мы определим следующим образом: из точки $\vec{r} = (x, y, z)$, как из центра, опишем сферу радиуса a в момент t и выберем временной интервал τ . Макроскопические переменные определим как арифметическое среднее от микроскопических, входящих в данный объем $\frac{4\pi}{3}a^3 \cdot 2\tau$:

$$\langle f(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}a^3 \cdot 2\tau} \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq a^2} d\xi d\eta d\zeta \int_{-\tau}^{\tau} d\theta f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \theta). \quad (1.6)$$

Размеры a и τ предполагаются достаточно большими по сравнению с характерными внутриатомными масштабами 10^{-8} см и 10^{-16} сек, и в то же время малыми по сравнению с макроскопическими масштабами. Обычно $a \sim 10^2 \div 10^3$ нм. В случае электромагнитных волн, характеризуемых длиной волны λ и периодом T $a \sim \lambda$, $\tau \sim T$, в остальных случаях эти размеры остаются до известной степени неопределенными. Заметим также, что интегрирование в (1.6) не затрагивает макроскопических переменных центра объема (x, y, z, t) , так что усреднение переставимо с дифференцированием по \vec{r} и t :

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle.$$

В результате усреднение микроскопических уравнений (1.5) сводится к замене микроскопических величин на их средние:

$$\operatorname{div} \langle \vec{H}_{\text{микро}} \rangle = 0, \quad \operatorname{rot} \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial \langle \vec{H}_{\text{микро}} \rangle}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Сопоставляя первую пару уравнений (1.7) с макроскопическим (1.1), мы видим, что они совпадают при условии

$$\langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \vec{E}, \quad \langle \vec{H}_{\text{микро}} \rangle = \vec{B}. \quad (1.8)$$

Если первое из этих условий очевидно и ожидаемо, то второе – неочевидно. Средним значением напряженности микроскопического магнитного поля является именно магнитная индукция, то есть поле \vec{B} описывает магнитное поле в веществе, а поле \vec{H} есть вспомогательная переменная, $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$.

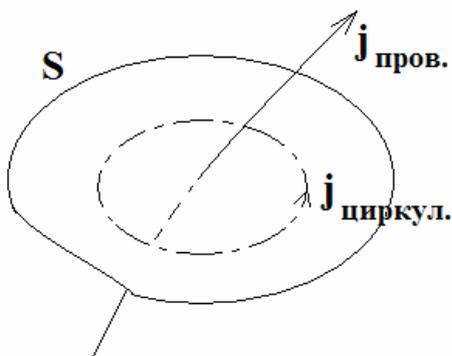
Сравнивая вторые пары уравнений (1.1) и (1.7), находим их совпадение при условиях

$$\langle \vec{j}_{\text{микро}} \rangle = \vec{j} + c \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\rho_{\text{микро}} = \rho - \operatorname{div} \vec{P}. \quad (1.10)$$

Три слагаемых, определяющие среднее значение микроскопических токов, имеют разное происхождение и физический смысл. Первый ток \vec{j} есть ток проводимости, он связан с реальным переносом зарядов и характеризуется ненулевым потоком

$$\int_S \langle \vec{j}_{\text{микро}} \rangle_{\text{пров.}} \cdot d\vec{f} \neq 0.$$



Второе слагаемое есть циркуляционный ток $\langle \vec{j} \rangle_{\text{цирк.}} = c \operatorname{rot} \vec{M}$. Он связан с локальными замкнутыми токами и обладает нулевым потоком через поверхность S.

$$\int_S \langle \vec{j}_{\text{микро}} \rangle_{\text{циркул.}} \cdot d\vec{f} = 0$$

Так как замкнутые токи формируют магнитные моменты, то неудивительно, что циркуляционный ток связан с намагниченностью. Третье слагаемое в (1.9) есть поляризационный ток, который проявляется в отсутствие свободных зарядов в диэлектриках. Вспоминая определение поляризации (1.2), видим, что

$$\dot{\vec{P}} = \left\langle \sum_a e_a \vec{r}_a \right\rangle = \left\langle \sum_a e_a \vec{v}_a \right\rangle$$

имеет размерность тока и проявляется в виде колебаний заряженных частиц, формирующих дипольные моменты.

Так вещество в нормальных условиях электронейтрально, то внутри $\rho = 0$, причем для металлов $\langle \rho_{\text{микро}} \rangle$ определяется как среднее свободных зарядов, а для диэлектриков как среднее от связанных зарядов. На поверхности вещества возможна ненулевая плотность зарядов $\rho = \rho_{\text{пов.}}$. Кроме того, неоднородная поляризация в диэлектрике порождает объемный поляризационный заряд с плотностью $-\text{div } \vec{P}$. Приведенное выше усреднение микроскопических полей и вывод макроскопических уравнений был сделан Г.А. Лоренцом спустя много лет, как Максвелл записал свои уравнения (1.1).

Вектор Умова-Пойнтинга в сплошной среде сохраняет свое определение

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H},$$

а закон сохранения энергии имеет вид

$$-\text{div } \vec{S} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (1.11)$$

1.3. Макроскопические уравнения Максвелла в релятивистском виде

Микроскопические напряженности $\vec{E}_{\text{микро}}$ и $\vec{H}_{\text{микро}}$ являются компонентами 4-х тензора электромагнитного поля $F^{\mu\nu}_{\text{микро}} = (\vec{E}_{\text{микро}}, \vec{H}_{\text{микро}})$ [23]. После его усреднения возникает макроскопический тензор $F^{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{B})$ с компонентами

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & -E_x, & -E_y, & -E_z \\ E_x, & 0, & -B_z, & B_y \\ E_y, & B_z, & 0, & -B_x \\ E_z, & -B_y, & B_x, & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

с помощью которого первая пара уравнений (1.2.1) в 4-х мерном виде выглядит также, как в Части I:

$$e^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (1.13)$$

Для записи второй пары требуются вектора \vec{D} и \vec{H} , не являющиеся непосредственно средними значениями микроскопических полей. Из компонент (\vec{D}, \vec{H}) можно определить второй тензор электромагнитного поля $H^{\mu\nu}$,

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & -D_x, & -D_y, & -D_z \\ D_x, & 0, & -H_z, & H_y \\ D_y, & H_z, & 0, & -H_x \\ D_z, & -H_y, & H_x, & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

с помощью которого вторая пара уравнений Максвелла в 4-х мерной записи имеет вид:

$$\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (1.15)$$

где 4-х вектор тока $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ определяется только током проводимости. Заметим, что связь между индукциями и напряженностями (1.14) также может быть записана в тензорном виде. Пара трехмерных векторов (\vec{P}, \vec{M}) также формирует антисимметричный 4-х тензор второго ранга $P^{\mu\nu}$ -тензор поляризации с компонентами

$$P^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & -P_x, & -P_y, & -P_z \\ P_x, & 0, & -M_z, & M_y \\ P_y, & M_z, & 0, & -M_x \\ P_z, & -M_y, & M_x, & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

В тензорном виде два определения (1.3) выглядит следующим образом:

$$H^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - 4\pi P^{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Поскольку трансформационные свойства всех 4-х тензоров одинаковы при преобразованиях Лоренца, 4-х мерная формулировка позволяет записать материальные соотношения типа (1.4) для движущихся сред. В инерциальной системе k' , двигающейся прямолинейно и равномерно вместе с веществом со скоростью \vec{v} относительно системы k , выполняются соотношения (1.4): $\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}'$, $\vec{B}' = \mu \vec{H}'$. При переходе в лабораторную систему k поля преобразуются следующим образом

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad \vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \right), \quad \gamma = 1 / (1 - v^2 / c^2)^{1/2},$$

$$\vec{D}' = \gamma \left(\vec{D} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right), \quad \vec{H}' = \gamma \left(\vec{H} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{D} \right). \quad (1.18)$$

Это соотношение справедливо при произвольной величине v/c . При $v/c \ll 1$ можно разрешить систему уравнений (1.18) относительно \vec{B} и \vec{D} и сформулировать теорему линейного отклика для движущихся сред:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \frac{\epsilon \mu - 1}{c^2} \vec{v} \times \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} + \frac{\epsilon \mu - 1}{c^2} \vec{E} \times \vec{v}. \quad (1.19)$$

Легко видеть, что при $v \rightarrow 0$ эти выражения переходят в (1.4).

Контрольные вопросы

1. Почему для описания макроскопических явлений неудобно пользоваться микроскопическими уравнениями Максвелла?
2. Какой вектор-напряженности или индукции, равен среднему значению напряженности микроскопического магнитного поля?
3. Как выглядят условия линейной связи между внешними воздействиями и откликами на них (аналог формул (1.4) в случае переменных полей)?
4. Можно ли макроскопические уравнения Максвелла в релятивистском случае записать с помощью тензора электромагнитного поля по аналогии с микроскопическими уравнениями?
5. С помощью тензора поляризации (1.16) запишите преобразования Лоренца для электрической поляризации и намагниченности.

Глава 2. Статические поля в различных средах

2.1. Электростатика проводников

Как известно, в отношении электрических свойств все тела делятся на две категории — проводники и диэлектрики, причем первые отличаются от вторых тем, что всякое электрическое поле вызывает в них движение зарядов — электрический ток.

Мы начнем с изучения постоянных электрических полей, создаваемых заряженными проводниками (электростатика проводников). Из основного свойства проводников, прежде всего, следует, что в электростатическом случае напряженность электрического поля внутри них должна быть равной нулю. Действительно, отличная от нуля напряженность \vec{E} привела бы к возникновению тока; между тем распространение тока в проводнике связано с диссипацией энергии и потому не может само по себе (без внешних источников энергии) поддерживаться в стационарном состоянии.

Отсюда в свою очередь следует, что все заряды в проводнике должны быть распределены по его поверхности: наличие зарядов в объеме проводника непременно привело бы к возникновению электрического поля в нем; распределение же зарядов по поверхности может быть осуществлено таким образом, чтобы создаваемые ими внутри проводника поля взаимно компенсировались.

Тем самым задача электростатики проводников сводится к определению электрического поля в пустоте, вне проводников, и к определению распределения зарядов по поверхности проводников.

В точках, не слишком близких к поверхности тела, среднее поле \vec{E} в пустоте фактически совпадает с истинным полем \vec{e} . Эти две величины отличаются друг от друга лишь в непосредственной близости к телу, где еще сказывается влияние нерегулярных молекулярных полей. Последнее обстоятельство, однако, не отражается на виде усредненных уравнений поля.

Поскольку среднее магнитное поле предполагается отсутствующим, то постоянное электрическое поле в пустоте удовлетворяет обычным уравнениям

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \operatorname{rot}\vec{E} = 0, \quad (2.1)$$

т. е. является потенциальным полем с потенциалом φ , связанным с напряженностью соотношением

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \quad (2.2)$$

и удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (2.3)$$

Определим теперь граничные условия для поля \vec{E} на поверхности проводника. Они следуют из самого уравнения $\text{rot}\vec{E} = 0$, справедливого и вне, и внутри тела. Выберем ось z по направлению нормали \vec{n} к поверхности проводника в некоторой его точке. Тогда

$$(\text{rot}\vec{E})_x = 0 = (\text{rot}\vec{E})_y, \quad (2.4)$$

или

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (2.5)$$

и, поскольку внутри проводника вообще $\vec{E} = 0$, то мы приходим к выводу, что касательные компоненты внешнего поля на его поверхности должны обращаться в нуль:

$$E_t = 0, \quad (2.6)$$

Таким образом, электростатическое поле должно быть нормальным к поверхности проводника в каждой ее точке. Поскольку $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, то это значит, что потенциал поля должен быть постоянным вдоль всей поверхности каждого данного проводника. Другими словами, поверхность однородного проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность электростатического поля.

Нормальная же к поверхности компонента поля весьма просто связана с плотностью распределенного по поверхности заряда. Эта связь получается из общего электродинамического уравнения $\text{div}\vec{e} = 4\pi\rho$, которое после усреднения принимает вид

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi\bar{\rho}, \quad (2.7)$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность заряда. В интегральном виде это уравнение означает, как известно из теоремы Остроградского-Гаусса, что поток электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален полному заряду,

находящемуся в ограниченном этой поверхностью объеме. Применив эту теорему к элементу объема, заключенному между двумя бесконечно близкими единичными площадками, примыкающими с обеих сторон к поверхности проводника, и учитывая, что на внутренней площадке $\vec{E} = 0$, найдем, что $E_n = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность заряда, т. е. заряд на единице площади поверхности проводника. Таким образом, распределение зарядов по поверхности проводника дается формулой

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial n}, \quad (2.8)$$

(производная от потенциала берется в направлении внешней нормали к поверхности).

Распределение потенциала во всяком электростатическом поле обладает следующим замечательным свойством: Потенциал φ может достигать максимального или минимального значения лишь на границах области поля. Эту теорему можно сформулировать и как утверждение о невозможности устойчивого равновесия внесенного в поле пробного заряда q , так как нет такой точки, в которой бы его потенциальная энергия $q\varphi$ имела минимум.

Доказательство теоремы весьма просто. Допустим, например, что в некоторой точке A (не находящейся на границе поля) потенциал имеет максимум. Тогда можно окружить точку A такой малой замкнутой поверхностью, на которой везде производная по нормали $\partial\varphi/\partial n < 0$. Следовательно, и интеграл по этой поверхности $\oint (\partial\varphi/\partial n) df < 0$, что, по теореме Остроградского-Гаусса $\oint (\partial\varphi/\partial n) df = \int \Delta\varphi dV < 0$, противоречит уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

2.1. Методы решения электростатических задач

Общие методы решения уравнения Лапласа при заданных граничных условиях изучаются в соответствующем разделе математической физики. Мы ограничимся здесь «физическими» способами решения ряда типичных задач.

Метод изображений. Решение задачи определения поля, создаваемого точечным зарядом e , расположенным над проводящей плоскостью, является простейшим примером применения так называемого метода изображений. Идея этого метода состоит в подборе таких дополнительных фиктивных точечных зарядов, которые вместе с данными зарядами создавали бы поле, для которого поверхность заданного проводника совпадала бы с одной из эквипотенциальных поверхностей поля. В данном случае это достигается введением фиктивного заряда e' , расположенного в точке, представляющей собой зер-

кальное отражение точки e в граничной плоскости проводящей среды. Этот метод применим, если проводящими поверхностями являются плоскости или сферы.

Рассмотрим подробнее задачу о заряде над проводящей плоскостью. Пусть заряд e расположен на расстоянии a над плоскостью. Предположим, что поле, создаваемое расположенными на плоскости зарядами, вне плоскости можно представить в виде поля фиктивного заряда e' , расположенного за плоскостью. Из симметрии очевидно, что такое поле создает заряд $e' = -e$, расположенный на расстоянии a под плоскостью – тогда потенциал плоскости будет равен нулю. В самом деле, потенциал поля заряда e и его «изображения» $e' = -e$ равен

$$\varphi = e \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right), \quad (2.9)$$

где r и r' — расстояния точки наблюдения от зарядов e и e' . На граничной плоскости $r = r'$ и потенциал имеет постоянное значение $\varphi = 0$, так что необходимое граничное условие действительно выполняется и (2.9) дает решение поставленной задачи. Отметим, что заряд e притягивается к проводящей плоскости с силой $e^2 / (2a)^2$ (сила изображения), а энергия взаимодействия равна $-e^2 / (4a)$. Распределение на граничной плоскости поверхностных зарядов, индуцированных точечным зарядом e , дается формулой

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{e}{2\pi} \frac{a}{r^3}, \quad (2.10)$$

где a — расстояние от заряда до плоскости.

Далее, рассмотрим более сложную задачу о поле, создаваемом точечным зарядом e , находящимся вблизи сферического проводника. Для решения этой задачи воспользуемся следующим результатом, который легко проверить непосредственными вычислениями. Потенциал поля, создаваемого двумя точечными зарядами e и $-e'$

$$\varphi = \left(\frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} \right) \quad (2.11)$$

обращается в нуль на сферической поверхности радиуса R , центр которой лежит на продолжении прямой, соединяющей точки e и $-e'$, на расстоянии l и l' от этих точек, причем l, l', R удовлетворяют равенствам

$$\frac{e^2}{l} = \frac{e'^2}{l'}, \quad ll' = R^2. \quad (2.12)$$

Предположим сначала, что сферический проводник поддерживается при постоянном потенциале $\varphi = 0$ (заземлен). Тогда поле, создаваемое вне сферы точечным зарядом e , находящимся на расстоянии l от центра сферы будет совпадать с полем, создаваемым системой двух зарядов: данным зарядом e и фиктивным зарядом $-e'$, помещенным внутри сферы на расстоянии l' от его центра, причем

$$l' = \frac{R^2}{l}, \quad e' = \frac{eR}{l}. \quad (2.13)$$

Если же проводящая сфера поддерживается при равном нулю полном заряде (изолированная незаряженная сфера), то надо ввести еще один фиктивный заряд таким образом, чтобы полный индуцированный на поверхности шара заряд оказался равным нулю, причем не должно нарушаться постоянство потенциала на этой поверхности. Это достигается помещением заряда $+e'$ в центр сферы.

Наконец, если заряд e находится в сферической полости в проводящей среде, то поле внутри полости совпадает с полем, которое создавалось бы зарядом e и его «изображением» вне сферы (независимо от того, заземлен проводник или изолирован).

Метод инверсии. Существует простой метод, который в ряде случаев позволяет по известному решению одной электростатической задачи найти решение другой задачи. Основанием этого метода является инвариантность уравнения Лапласа по отношению к определенному преобразованию переменных.

В сферических координатах уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \varphi = 0, \quad (2.14)$$

где посредством Δ_{Ω} обозначена угловая часть оператора Лапласа. Легко убедиться в том, что это уравнение сохраняет свою форму, если вместо переменной r ввести новую переменную r' согласно

$$r = \frac{R^2}{r'} \quad (2.15)$$

(преобразование инверсии) и одновременно заменить неизвестную функцию φ согласно

$$\varphi = \frac{r'}{R} \varphi'. \quad (2.16)$$

Здесь R — некоторая постоянная с размерностью длины (радиус инверсии). Таким образом, если функция $\varphi(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция

$$\varphi'(\vec{r}') = \frac{R}{r'} \varphi\left(\frac{R^2}{r'^2} \vec{r}\right) \quad (2.17)$$

тоже есть решение этого уравнения.

Предположим, что нам известно решение задачи об электростатическом поле, создаваемом некоторой системой проводников, которые находятся при одном и том же потенциале φ_0 , и системой точечных зарядов. Потенциал $\varphi(\vec{r})$ обычно определяют так, чтобы он обращался в нуль на бесконечности. Здесь, однако, мы определим $\varphi(\vec{r})$ так, чтобы на бесконечности эта функция стремилась к $-\varphi_0$; тогда на проводниках $\varphi = 0$.

Выясним теперь, какая электростатическая задача будет решаться преобразованной функцией (2.14). Прежде всего, меняются фигуры всех протяженных проводников и их взаимное расположение. Граничное условие постоянства потенциала на поверхности проводников автоматически выполняется, так как при $\varphi = 0$ будет и $\varphi' = 0$. Далее, меняются расположение и величины всех точечных зарядов: заряд, находящийся в точке \vec{r}_0 , переходит в точку $\vec{r}'_0 = (R^2 / r_0^2) \vec{r}_0$. Определим теперь величину заряда e' . При $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0$ потенциал $\varphi(\vec{r})$ обращается в бесконечность по закону $\varphi = e / |\Delta\vec{r}|$, где $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$. С другой стороны, дифференцируя соотношение $\vec{r} = (R^2 / r'^2) \vec{r}'$, найдем, что

$$(\Delta\vec{r})^2 = \frac{R^4}{r'^4} (\Delta\vec{r}')^2 \quad (2.18)$$

Поэтому при $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0$ функция φ' стремится к бесконечности по закону

$$\varphi' = \frac{R}{r'_0} \frac{e}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{er'_0}{R|\Delta\vec{r}'|}, \quad (2.19)$$

соответствующему заряду

$$e' = \frac{er'_0}{R} = \frac{eR}{r_0}. \quad (2.20)$$

Наконец, рассмотрим поведение функции φ' вблизи начала координат. Точке $\vec{r}' \rightarrow 0$ соответствует $\vec{r} \rightarrow \infty$. Но при $\vec{r} \rightarrow \infty$ функция φ стремится к $-\varphi_0$. Поэтому при $\vec{r}' \rightarrow 0$ функция φ' обращается в бесконечность по закону

$$\varphi' = -\frac{R\varphi_0}{r'}. \quad (2.21)$$

Это значит, что в точке $\vec{r}' = 0$ находится заряд $e_0 = -R\varphi_0$.

Итак, при преобразовании инверсии:

1. изменяется форма и положение проводников;
2. изменяется положение и величины точечных зарядов;
3. в центре координат появляется точечный заряд.

Укажем, как преобразуются при инверсии некоторые геометрические фигуры. Для начала рассмотрим сферу. Сферическая поверхность радиуса a и с центром в точке \vec{r}_0 $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = a^2$ после проведения преобразования инверсии имеет уравнение $(R^2 / r'^2 \cdot \vec{r}' - \vec{r}_0)^2 = a^2$, которое после умножения на r'^2 и перегруппировки членов опять может быть приведено к виду $(\vec{r}' - \vec{r}'_0)^2 = a'^2$.

Таким образом, мы снова получаем сферу (другого радиуса и с другим центром). Если первоначальная сфера проходила через начало координат, то в этом случае сфера преобразуется в плоскость.

Если же рассмотреть плоскость, то при преобразовании инверсии она преобразуется или в другую параллельную ей плоскость, или в сферу, если начало координат принадлежит исходной плоскости.

Метод конформного отображения. Поле, зависящее только от двух декартовых координат x, y , называют плоским. Мощным средством для решения плоских задач электростатики является теория функций комплексного переменного. Основания для применения этой теории заключаются в следующем.

Электростатическое поле в пустоте удовлетворяет двум уравнениям: $\text{rot}\vec{E} = 0$ и $\text{div}\vec{E} = 0$. Первое из них позволяет ввести потенциал поля согласно $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$. Второе же уравнение показывает, что наряду с обычным скалярным потенциалом φ для электростатического поля в пустоте можно ввести и векторный потенциал поля \vec{A} согласно $\vec{E} = \text{rot}\vec{A}$. В трехмерном случае такое преобразование обычно не интересно – вместо уравнения в частных производных

водных второго порядка на скалярный потенциал (уравнения Лапласа), мы имеем аналогичное уравнение для векторного потенциала. То есть вместо одной неизвестной функции у нас их 3. В плоском же случае вектор \vec{E} лежит в плоскости $x y$ и зависит только от этих двух координат. Соответственно, вектор \vec{A} можно выбрать так, чтобы он был везде направлен перпендикулярно к плоскости $x y$. Тогда компоненты напряженности выражаются в виде производных от φ или \vec{A} согласно

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Но такие соотношения между производными функций φ и A_z совпадают с известными условиями Коши—Римана, выражающими тот факт, что комплексная функция

$$\omega = \varphi - iA_z \quad (2.22)$$

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x - iy$.

Рассмотрим физический смысл комплексного потенциала $\omega(z)$. По определению, комплексная функция $\omega(z)$ имеет в каждой точке определенную производную, не зависящую от направления, в котором она берется. Тогда, дифференцируя в направлении оси x , найдем, что

$$\frac{d}{dz} \omega = \frac{\partial}{\partial x} \varphi - i \frac{\partial}{\partial x} A_z = E_x - iE_y. \quad (2.23)$$

И это соотношение не зависит от выбора направления дифференцирования. Далее, силовые линии электрического поля определяются уравнением

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}, \quad (2.24)$$

или

$$dx \frac{\partial}{\partial x} A_z + dy \frac{\partial}{\partial y} A_z = 0, \quad (2.25)$$

откуда $A_z(x, y) = \text{const}$. Таким образом, линии постоянных значений мнимой части комплексного потенциала представляют собой силовые линии поля. Линии же постоянных значений ее вещественной части являются эквипотен-

циальными линиями. Взаимная ортогональность этих двух семейств линий обеспечивается уже исходными соотношениями (2.21).

Как вещественная, так и мнимая части комплексного потенциала в равной степени удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому с тем же успехом можно принять его мнимую часть в качестве потенциала поля. Соответственно силовые линии будут тогда даваться уравнениями $\operatorname{Re} \omega(z) = \text{const}$. Вместо (2.22) будем при этом иметь $\omega = i\varphi + A_z$.

Продолжим рассмотрение физического смысла комплексного потенциала. Поток напряженности электрического поля через какой-либо отрезок эквипотенциальной линии дается интегралом

$$\int E_n dl = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl, \quad (2.26)$$

где dl есть элемент эквипотенциальной линии, \vec{n} — направление нормали к ней. Согласно соотношениям (2.21) имеем $\partial \varphi / \partial n = -\partial A_z / \partial l$, причем выбор знака предполагает, что если смотреть в направлении \vec{n} , то положительное направление \vec{l} — влево. Поэтому

$$\int E_n dl = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \int \frac{\partial A_z}{\partial l} dl = \Delta A_z, \quad (2.27)$$

где ΔA_z — разность значений A_z на обоих концах отрезка. Поскольку поток электрического поля через замкнутый контур равен $4\pi\sigma$, где σ — полный заряд, охватываемый этим контуром (отнесенный к единице длины проводников вдоль оси z), то

$$e = \frac{1}{4\pi} \Delta A_z, \quad (2.27)$$

где ΔA_z — изменение A_z при обходе замкнутой эквипотенциальной линии в направлении против часовой стрелки.

Таким образом, мнимая часть комплексного потенциала имеет смысл потока электрического поля (отсчитываемого от произвольной оси). Кроме того, комплексный потенциал имеет особенности — точки ветвления логарифмического типа — в местах расположения двумерных зарядов (равномерно заряженных нитей, перпендикулярных плоскости $x y$).

Метод конформных преобразований основан на том факте, что конформные преобразования переводят гармонические функции в гармонические — то есть, решение уравнения Лапласа инвариантно относительно конформных преобразований. Предположим, что нам известно решение задачи элект-

тростатики для внешнего поля окружности с заданным на ней потенциалом. И пусть нам известно конформное преобразование, отображающее область, внешнюю к окружности, на область, внешнюю к другой фигуре – например, прямоугольника (преобразование Шварца). Тогда, записав решение для поля окружности в комплексной форме, с помощью простой замены переменных, заданной конформным преобразованием, мы получаем решение задачи о поле прямоугольника. Понятно, что конкретные формы тел – окружности и прямоугольника – не важны и взяты только для примера. Важно, что с помощью конформных преобразований мы можем, имея решение какой-либо задачи электростатики, получить решение другой задачи, если удастся найти конформное преобразование, заданным образом преобразующее форму тел. Примером конформного преобразования может служить двумерная модификация рассмотренного выше метода инверсий. В этом случае конформное преобразование задается функцией $f(z) = 1/(z - z_0)$.

2.2. Электростатика диэлектриков

Перейдем теперь к изучению постоянного электрического поля в другой категории материальных сред — в диэлектриках.

Основное свойство диэлектриков заключается в невозможности протекания в них постоянного тока. Поэтому, в отличие от проводников, напряженность постоянного электрического поля в диэлектриках отнюдь не должна быть равной нулю, и мы должны получить уравнения, которыми это поле описывается. Предположим, что внутрь вещества диэлектрика не внесено извне никаких посторонних зарядов - это есть наиболее обычный и важный случай. Под действием внешнего поля присутствующие в диэлектрике связанные заряды смещаются относительно друг друга, и можно полагать, что в этом случае возникает распределенный по объему проводника дипольный момент $\vec{P}(\vec{r})$. Его легко выразить через плотность связанных зарядов $\rho_{\text{св}}$: В самом деле, в малом объеме диэлектрика V' , когда уже нужно считать, что электрическое поле создается точечными микроскопическими зарядами:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{V'} \sum e_i (\vec{r}'_i + \vec{r}), \quad (2.28)$$

где положения \vec{r}'_i зарядов e_i отсчитываются от «центра» объема V' - его радиус-вектор \vec{r} . Тогда

$$\text{div} \vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{V'} \sum e_i = \rho_{\text{св}}. \quad (2.29)$$

Теперь уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{св}}), \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (2.30)$$

где ρ - плотность сторонних зарядов, можно записать в виде

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (2.30)$$

где введен **вектор электрической индукции** \vec{D} :

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \quad (2.31)$$

На поверхности раздела двух различных диэлектриков должны выполняться определенные граничные условия. Одно из этих условий является следствием уравнения $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$. Если поверхность раздела однородна по своим физическим свойствам, то это условие требует непрерывности тангенциальной составляющей напряженности поля:

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}. \quad (2.32)$$

Второе же условие следует из уравнения $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ в отсутствие сторонних зарядов и требует непрерывности нормальной к поверхности составляющей индукции:

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (2.33)$$

Действительно, скачок нормальной составляющей $D_n = D_z$ означал бы обращение производной dD_z / dz (а с нею и $\operatorname{div} \vec{D}$) в бесконечность.

На границе между диэлектриком и проводником $\vec{E}_t = 0$, а условие для нормальной компоненты получается из (2.30):

$$\vec{E}_t = 0, D_n = 4\pi\sigma, \quad (2.34)$$

где σ - плотность зарядов на поверхности проводника.

2.3. Свойства изотропных диэлектриков в статическом поле

Для того чтобы уравнения (2.30) составляли полную систему уравнений, определяющих электростатическое поле, к ним надо еще присоединить соотношение, связывающее индукцию \vec{D} и напряженность поля \vec{E} . В огромном большинстве случаев эту зависимость можно считать линейной. Она со-

ответствует первым членам разложения \vec{D} по степеням \vec{E} и связана, с малостью внешних электрических полей по сравнению с внутренними молекулярными полями.

Линейная зависимость \vec{D} от \vec{E} приобретает особенно простой вид в важнейшем случае изотропных диэлектриков. Очевидно, что в изотропном диэлектрике векторы \vec{D} и \vec{E} должны иметь одинаковое направление. Поэтому их линейная зависимость сводится к простой пропорциональности

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (2.35)$$

Коэффициент ε называется **диэлектрической проницаемостью вещества** и является функцией его термодинамического состояния.

Вместе с индукцией пропорциональна полю также и поляризация:

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \equiv \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec{E}. \quad (2.36)$$

Величина χ называется **коэффициентом поляризуемости вещества** (или его **диэлектрической восприимчивостью**). Поляризуемость разреженной среды (газ) можно считать пропорциональной ее плотности.

Граничные условия (2.32) и (2.33) на поверхности раздела двух изотропных диэлектриков принимают вид

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}, \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad (2.37)$$

Таким образом, нормальная составляющая напряженности поля испытывает скачок, меняясь обратно пропорционально диэлектрическим проницаемостям соответствующих сред.

В однородном диэлектрике $\varepsilon = \text{const}$, и тогда из уравнения $\text{div} \vec{D} = 0$ следует, что и $\text{div} \vec{P} = 0$. Это значит, что объемная плотность зарядов в таком теле отсутствует. Напротив, если диэлектрик не однороден, то имеем отличную от нуля объемную плотность

$$\rho = -\text{div} \vec{P} = -\text{div} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi \varepsilon} \vec{D} = -\frac{\vec{D}}{4\pi} \text{grad} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = -\frac{\vec{E}}{4\pi \varepsilon} \nabla \varepsilon. \quad (2.38)$$

Если стандартно ввести потенциал электрического поля $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$, то уравнение $\text{div} \vec{D} = 0$ приобретает вид

$$\text{div}(\varepsilon \nabla \varphi) = 0. \quad (2.39)$$

Это уравнение переходит в обычное уравнение Лапласа лишь в однородной диэлектрической среде. Граничные условия (2.37) можно переписать в виде следующих условий для потенциала:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}. \quad (2.40)$$

(условие непрерывности тангенциальных производных потенциала эквивалентно условию непрерывности самого φ).

В кусочно-однородной диэлектрической среде уравнение (2.39) сводится в каждом однородном участке к уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$, так что диэлектрические проницаемости входят в решение задачи только через посредство условий (2.40). Но эти условия содержат лишь отношение диэлектрических проницаемостей двух соприкасающихся сред. Поэтому, в частности, решение электростатической задачи для диэлектрического тела с проницаемостью ε_2 , окруженного средой с проницаемостью ε_1 , сводится к такой же задаче для тела с проницаемостью $\varepsilon_2/\varepsilon_1$, находящегося в пустоте.

Рассмотрим вопрос о том, как меняются полученные в предыдущих параграфах результаты для электростатического поля проводников, если последние находятся не в пустоте, а погружены в однородную и изотропную диэлектрическую среду. В обоих случаях распределение потенциала описывается уравнением $\Delta\varphi = 0$ с граничным условием постоянства φ на поверхности проводника, и все отличие заключается в том, что вместо связи $E_n = -\partial\varphi/\partial n = 4\pi\sigma$ с поверхностной плотностью зарядов теперь будет:

$$D_n = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (2.41)$$

Отсюда видно, что решение задачи о поле заряженного проводника в пустоте переходит в решение той же задачи в диэлектрической среде путем формальной замены потенциалов и зарядов: либо $\varphi \rightarrow \varepsilon\varphi$, $e \rightarrow e$, либо $\varphi \rightarrow \varphi$, $e \rightarrow e/\varepsilon$. При заданных зарядах проводников потенциал и напряженность поля убывают в ε раз по сравнению с их значениями для поля в пустоте; это ослабление поля может быть наглядно истолковано как результат частичной экранировки заряда проводника поверхностными зарядами прилегающего к нему поляризованного диэлектрика. Если же поддерживаются постоянными потенциалы проводников, то поле остается неизменным, но увеличиваются в ε раз заряды проводников).

Наконец, отметим, что в электростатике можно формально рассматривать проводник (незаряженный) как тело с бесконечной диэлектрической проницаемостью — в том смысле, что влияние, оказываемое им на внешнее

электрическое поле, такое же, какое оказывал бы диэлектрик (той же формы) с $\varepsilon \rightarrow \infty$. Действительно, в силу конечности граничного условия для индукции \vec{D} она должна оставаться конечной внутри тела и при $\varepsilon \rightarrow \infty$; но это означает, что в таком поле будет $\vec{E} = 0$, в соответствии со свойствами проводника.

2.4. Свойства анизотропных диэлектриков

В анизотропной диэлектрической среде (монокристалл) линейная связь между индукцией и напряженностью электрического поля имеет более сложный вид, не сводящийся к простой пропорциональности.

Наиболее общий вид такой зависимости дается выражением

$$D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik} E_k, \quad (2.42)$$

где \vec{D}_0 — постоянный вектор, а совокупность величин ε_{ik} составляет тензор второго ранга — **тензор диэлектрической проницаемости** (или, короче, диэлектрический тензор). Свободный член \vec{D}_0 существует, однако, не во всяком кристалле. Большинство типов кристаллографической симметрии не допускает существования постоянного вектора (см. ниже), и тогда имеем соотношение

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k. \quad (2.43)$$

Тензор ε_{ik} симметричен:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \quad (2.44)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что энергия системы

$$W = \frac{1}{8\pi} \int D_i E_i dV = \frac{1}{8\pi} \int E_i \varepsilon_{ik} E_k dV \quad (2.45)$$

есть квадратичная форма и антисимметричная часть рассматриваемого тензора не входит в выражение (2.45). Тогда, ни при каких условиях не присутствуя в Лагранжиане системы, антисимметричная часть тензора ε_{ik} не позволяет обнаружить себя экспериментально, и мы можем считать тензор диэлектрической проницаемости всегда симметричным.

Для дальнейшего отметим, что свободная энергия F равна

$$\begin{aligned}
F &= F_0 + W = F_0 + \frac{1}{8\pi} \int D_i E_i dV \\
&= F_0 + \frac{1}{8\pi} \int E_i \varepsilon_{ik} E_k dV = F_0 + \frac{1}{8\pi} \int D_i \varepsilon^{-1}_{ik} D_k dV
\end{aligned}
\tag{2.46}$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор ε_{ik} путем надлежащего выбора осей координат может быть приведен к диагональному виду. В общем случае, следовательно, тензор ε_{ik} определяется тремя независимыми величинами — тремя главными значениями $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$. Все эти величины всегда больше единицы.

В зависимости от той или иной симметрии кристалла число различных главных значений тензора ε_{ik} может оказаться и меньшим трех.

В кристаллах триклинной, моноклинной и ромбической систем все три главных значения различны; эти кристаллы называются **двухосными**. При этом в кристаллах триклинной системы направления главных осей тензора ε_{ik} не связаны однозначным образом с какими-либо кристаллографическими направлениями. В кристаллах моноклинной системы заранее определенным является направление одной из главных осей — она должна совпадать с осью симметрии второго порядка или быть перпендикулярной к плоскости симметрии кристалла. В кристаллах же ромбической системы кристаллографически определены все три главные оси тензора ε_{ik} .

Далее, в кристаллах тетрагональной, ромбоэдрической и гексагональной систем два из трех главных значений совпадают, так что имеются всего две независимые величины; такие кристаллы называют **одноосными**. Одна из главных осей совпадает при этом с кристаллографической осью симметрии четвертого, третьего или шестого порядка, а направление двух других главных осей можно выбрать произвольным образом.

Наконец, в кристаллах кубической системы все три главных значения тензора ε_{ik} одинаковы, а направления главных осей произвольны. Это значит, что тензор ε_{ik} имеет вид $\varepsilon \delta_{ik}$, т. е. определяется одним скаляром ε . Другими словами, в отношении своих диэлектрических свойств кристаллы кубической симметрии не отличаются от изотропных тел.

Все эти довольно очевидные свойства симметрии тензора ε_{ik} становятся особенно наглядными, если воспользоваться известным из тензорной алгебры понятием **тензорного эллипсоида**, длина полуосей которого пропорциональна главным значениям симметричного тензора второго ранга. Симметрия эллипсоида должна соответствовать при этом симметрии кристалла. Так, в одноосном кристалле тензорный эллипсоид вырождается в эллипсоид вращения, полностью симметричный относительно продольной оси; подчеркнем, что для физических свойств кристалла, определяющихся симметричным тензором второго ранга, наличие оси симметрии уже третьего поряд-

ка эквивалентно полной изотропии в плоскости, перпендикулярной к этой оси. В кристаллах кубической симметрии тензорный эллипсоид вырождается в сферу.

Остановимся теперь на особенностях диэлектрических свойств кристаллов с постоянным членом \vec{D}_0 в (2.43). Наличие этого члена означает, что диэлектрик спонтанно поляризован и в отсутствие внешнего электрического поля; такие тела называют пирозлектрическими. Величина этой спонтанной поляризации, однако, фактически всегда очень мала (по сравнению с молекулярными полями). Это обстоятельство связано с тем, что большие значения \vec{D}_0 приводили бы к существованию сильных полей внутри тела, что энергетически весьма невыгодно и потому не могло бы соответствовать термодинамическому равновесию. Малость \vec{D}_0 обеспечивает в то же время законность разложения \vec{D} по степеням E , первыми двумя членами которого и является выражение (2.43).

Термодинамические величины пирозлектрического тела находим, интегрируя соотношение

$$4\pi \frac{\partial F}{\partial E_i} = D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik} E_k. \quad (2.47)$$

Свободная энергия

$$F = F_0 + \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{ik} E_k E_i = F_0 + \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{-1}_{ik} (D_i - D_{0i})(D_k - D_{0k}). \quad (2.48)$$

Отметим, что из F выпадает выражение, линейное по E_i .

Тогда полная свободная энергия пирозлектрика есть

$$F = \int \left(F_0 + \frac{1}{8\pi} \vec{D} \vec{E} \right) dV. \quad (2.49)$$

Отметим, что свободная энергия пирозлектрика в отсутствие внешнего поля зависит (вместе с полем \vec{E}) не только от его объема, но и от формы.

Как уже было указано, явление пирозлектричества возможно не при всякой симметрии кристалла. Поскольку при любом преобразовании симметрии все свойства кристалла должны оставаться неизменными, то ясно, что пирозлектрическим может быть лишь такой кристалл, в котором существует направление, остающееся неизменным (в том числе не меняющееся на обратное) при всех преобразованиях симметрии; в этом направлении и будет лежать постоянный вектор \vec{D}_0 .

Этому условию удовлетворяют лишь те группы симметрии, которые складываются из одной оси и проходящих через нее плоскостей симметрии. В частности, пьезоэлектрическими заведомо не могут быть кристаллы, обладающие центром симметрии.

Следует указать, что в обычных условиях пьезоэлектрические кристаллы не имеют полного электрического дипольного момента, хотя поляризация в них и не равна нулю. Дело в том, что внутри спонтанно поляризованного диэлектрика имеется отличная от нуля напряженность поля \vec{E} . Благодаря тому, что фактически образец обычно обладает некоторой, хотя и малой, но все же не равной нулю проводимостью, наличие поля вызовет появление тока, который будет течь до тех пор, пока образующиеся на поверхности тела свободные заряды не приведут к исчезновению поля в образце. В том же направлении действуют ионы, оседающие на поверхность образца из воздуха. На опыте пьезоэлектрические свойства наблюдаются при нагревании тела, когда величина его спонтанной поляризации меняется - это изменение обнаруживается.

2.5. Постоянный ток

От изучения электрических полей, создаваемых неподвижными зарядами, мы перейдем теперь к рассмотрению стационарного движения зарядов в проводниках (постоянный электрический ток).

Будем обозначать среднюю плотность потока зарядов буквой \vec{j} ; ее называют плотностью электрического тока. В постоянном токе пространственное распределение \vec{j} не зависит от времени и подчиняется уравнению

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (2.50)$$

выражающему собой постоянство полного среднего заряда, заключенного в любой части объема проводника.

Электрическое поле, существующее внутри проводника, по которому течет постоянный ток, тоже постоянно, а потому удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (2.51)$$

т. е. имеет потенциал.

К этим двум уравнениям должно еще быть присоединено уравнение, связывающее между собой величины \vec{j} и \vec{E} . Эта связь зависит от свойств вещества проводника. В огромном большинстве случаев ее можно считать линейной (закон Ома).

Если проводник однороден и изотропен, то линейная зависимость сводится к простой пропорциональности

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.52)$$

Коэффициент σ зависит от рода и состояния проводника; его называют **коэффициентом электропроводности** или просто **проводимостью** тела.

В однородном проводнике $\sigma = \text{const}$ и подстановка (2.52) в (2.50) дает $\text{div } \vec{E} = 0$. Поэтому в этом случае потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$.

На границе раздела двух проводящих сред нормальная компонента плотности тока должна, очевидно, быть непрерывной. Кроме того, согласно общему условию непрерывности тангенциальной компоненты напряженности (следующему из уравнения $\text{rot } \vec{E} = 0$, должно быть непрерывно отношение \vec{j}_t / σ . Таким образом, граничные условия для плотности тока имеют следующий вид:

$$j_{n1} = j_{n2}, \quad \vec{j}_{t1} / \sigma_1 = \vec{j}_{t2} / \sigma_2, \quad (2.53)$$

или для напряженности поля

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}, \quad \vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}. \quad (2.54)$$

На границе же проводника с непроводящей средой имеем просто $j_n = 0$ или $E_n = 0$.

Обратим внимание на то, что уравнения $\text{rot } \vec{E} = 0$, $\text{div } \sigma \vec{E} = 0$ и граничные условия (2.54) к ним обнаруживают формальную аналогию с уравнениями электростатического поля в диэлектриках, отличаясь от них лишь заменой ϵ на σ . Это обстоятельство позволяет находить решения задач о распределении тока в неограниченной проводящей среде непосредственно по решениям аналогичных электростатических задач. При наличии границ проводника с непроводящей средой эта аналогия не приводит к цели, так как в электростатике нет сред с $\epsilon = 0$.

Электрическое поле, поддерживающее ток, производит над перемещающимися в проводнике заряженными частицами (носителями тока) механическую работу; работа, производимая в 1с в единице объема, равна, очевидно, произведению $\vec{j} \vec{E}$. Эта работа диссипируется в веществе проводника, переходя в тепло. Таким образом, количество тепла, выделяющегося в 1с в 1см^3 однородного проводника, равно

$$\vec{j} \vec{E} = \sigma E^2 = j^2 / \sigma, \quad (2.55)$$

(закон Джоуля-Ленца).

Выделение тепла приводит к возрастанию энтропии тела. При выделении тепла $dQ = \vec{j}\vec{E}dV$ энтропия данного элемента объема увеличивается на dQ/T . Поэтому скорость изменения полной энтропии тела равна

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\vec{j}\vec{E}}{T} dV. \quad (2.56)$$

В силу закона возрастания энтропии эта производная должна быть положительной. Подставив в нее $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, мы видим, что из этого требования можно сделать заключение о положительности проводимости σ .

В анизотропном теле (монокристалле) направления векторов \vec{j} и \vec{E} , вообще говоря, не совпадают и линейная связь между ними выражается формулами вида

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \quad (2.57)$$

где величины σ_{ik} составляют симметричный (см. ниже) тензор второго ранга (**тензор проводимости**).

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Сама по себе симметрия кристалла могла бы допустить наличие свободного члена в линейной связи между \vec{j} и \vec{E} , т. е. формулу вида

$$j_i = j_{0i} + \sigma_{ik} E_k \quad (2.58)$$

с постоянным вектором \vec{j}_0 . Наличие такого члена означало бы «пироэлектричность» проводника — в отсутствие тока ($\vec{j} = 0$) в нем существовало бы отличное от нуля поле. В действительности, однако, это невозможно в силу закона возрастания энтропии: член $\vec{j}_0\vec{E}$ в подынтегральном выражении в (2.56) заведомо мог бы иметь оба знака, в результате чего dS/dt не могла бы быть существенно положительной величиной.

Подобно тому как в изотропной среде условие $dS/dt > 0$ приводит к положительности σ , так в анизотропном теле из этого условия следует положительность главных значений тензора σ_{ik} .

Зависимость числа независимых компонент тензора от симметрии кристалла такая же, как у всякого симметричного тензора второго ранга: у двухосных кристаллов все три главных значения различны, у одноосных — два из них одинаковы, а у кубических — все три одинаковы, т. е. кубический кристалл в отношении своих свойств проводимости ведет себя как изотропное тело.

Симметричность тензора проводимости

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (2.59)$$

является следствием **принципа симметрии кинетических коэффициентов**. Формулировка этого общего принципа, принадлежащего Л. Онсагеру, удобная для применения здесь и ниже, заключается в следующем.

Пусть x_1, x_2, \dots — некоторые величины, характеризующие состояние тела в каждой его точке. Наряду с ними вводим величины

$$X_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}, \quad (2.60)$$

где S — энтропия единицы объема тела, а производная берется при постоянной энергии этого объема. В состоянии, близком к равновесному, величины x_α близки к своим равновесным значениям, а величины X_α малы. При этом в теле будут происходить процессы, стремящиеся привести его в состояние равновесия. О скоростях изменения величин x_α при этих процессах можно обычно утверждать, что они являются в каждой точке тела функциями только значений величин x_α (или X_α) в тех же точках. Разлагая эти функции в ряд по степеням X_α и ограничиваясь линейными членами в разложении, получим соотношения вида

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = -\sum_{\beta} \gamma_{\alpha\beta} X_\beta. \quad (2.61)$$

Тогда можно утверждать, что коэффициенты $\gamma_{\alpha\beta}$ (**кинетические коэффициенты**) симметричны по индексам α и β :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}. \quad (2.62)$$

Для фактического использования этого принципа необходимо, выбрав тем или иным способом величины x_α (или прямо их производные \dot{x}_α), определить соответствующие X_α . Эта задача обычно может быть весьма просто решена с помощью формулы, определяющей скорость изменения со временем полной энтропии тела:

$$\frac{dS}{dt} = -\int \sum_{\alpha} X_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} dV, \quad (2.63)$$

где интегрирование производится по всему объему тела.

В данном случае при прохождении тока через проводник для этой скорости мы имеем формулу (2.56). Сравнивая ее с (2.63), мы видим, что если в качестве величин \dot{x}_α , выбрать компоненты вектора плотности тока \vec{j} , то соответствующими величинами X_α будут компоненты вектора $-\vec{E}/T$. Сравнение же формул (2.57) и (2.61) показывает, что роль кинетических коэффициентов играют при этом умноженные на T компоненты тензора проводимости, симметрия которого следует, таким образом, непосредственно из общих соотношений (2.62).

2.6. Эффект Холла

Если проводник находится во внешнем магнитном поле \vec{H} , то связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля по-прежнему дается соотношениями

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \quad (2.64)$$

но компоненты тензора проводимости σ_{ik} являются функциями \vec{H} и, что особенно существенно, уже не симметричны по своим индексам. Симметрия этого тензора была доказана ранее, исходя из принципа симметрии кинетических коэффициентов. Но в магнитном поле, как известно, формулировка этого принципа несколько меняется: одновременно с перестановкой индексов у кинетических коэффициентов должно быть изменено на обратное также и направление магнитного поля. Поэтому для компонент тензора $\sigma_{ik}(\vec{H})$ будем теперь иметь соотношения

$$\sigma_{ik}(\vec{H}) = \sigma_{ki}(-\vec{H}). \quad (2.65)$$

Величины же $\sigma_{ik}(\vec{H})$ и $\sigma_{ki}(\vec{H})$ отнюдь не равны друг другу.

Как и всякий общий тензор второго ранга, тензор σ_{ik} можно разделить на симметричную и антисимметричную части, которые мы обозначим соответственно как s_{ik} и a_{ik} :

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \quad (2.66)$$

По определению,

$$s_{ik} = s_{ki}, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad (2.67)$$

а из (2.65) следует, что

$$\begin{aligned} s_{ik}(\vec{H}) &= s_{ki}(-\vec{H}) = s_{ik}(-\vec{H}) \\ a_{ik}(\vec{H}) &= a_{ki}(-\vec{H}) = -a_{ik}(-\vec{H}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Таким образом, компоненты тензора s_{ik} являются четными, а тензора a_{ik} — нечетными функциями магнитного поля.

Как известно, всякий антисимметричный тензор второго ранга a_{ik} эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору, с которым его компоненты связаны следующим образом:

$$a_{xy} = a_z, \quad a_{xz} = -a_y, \quad a_{yz} = a_x \quad (2.69)$$

С помощью этого вектора компоненты произведения $a_{ik}E_k$ могут быть написаны в виде компонент векторного произведения $[\vec{E}\vec{a}]$:

$$j_i = \sigma_{ik}E_k = s_{ik}E_k + [\vec{E}\vec{a}]_i. \quad (2.70)$$

Джоулево тепло, выделяющееся при прохождении тока, определяется произведением $\vec{j}\vec{E}$. В силу перпендикулярности векторов $[\vec{E}\vec{a}]$ и \vec{E} их произведение обращается тождественно в нуль, так что

$$\vec{j}\vec{E} = s_{ik}E_kE_i, \quad (2.71)$$

т. е. джоулево тепло определяется одной лишь симметричной частью тензора проводимости.

Если магнитное поле достаточно слабое, можно разложить компоненты тензора проводимости по его степеням. Ввиду нечетности функции $\vec{a}(\vec{H})$, в разложение этого вектора войдут только члены нечетных степеней. Первые члены разложения линейны по полю, т. е. имеют вид

$$a_i = \alpha_{ik}H_k, \quad (2.72)$$

Векторы \vec{a} и \vec{H} оба аксиальны; поэтому постоянные α_{ik} составляют обычный (полярный) тензор. В разложение же четных функций $s_{ik}(\vec{H})$ входят только члены с четными степенями. Первый член разложения есть проводи-

мость $\sigma_{ik}^{(0)}$ в отсутствие поля, а первые поправочные члены квадратичны по полю:

$$s_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \beta_{iklm} H_m H_l. \quad (2.73)$$

Тензор β_{iklm} симметричен как по индексам ik , так и по индексам lm .

Таким образом, основной, линейный по полю, эффект влияния магнитного поля заключен в члене $[\vec{E}\vec{a}]$ (эффект Холла). Он состоит, как мы видим, в появлении тока, перпендикулярного к электрическому полю и по величине пропорционального напряженности магнитного поля. Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае произвольной анизотропной среды холловский ток не является единственным, перпендикулярным к \vec{E} ; такие составляющие может иметь и не холловский ток $s_{ik} E_{ki}$.

Эффект Холла имеет и другой аспект, явствующий из обратных формул, выражающих поле \vec{E} через плотность тока:

$$E_i = \sigma^{-1}_{ik} j_k. \quad (2.74)$$

Обратный тензор σ^{-1}_{ik} , как и прямой, можно разложить на симметричную часть (которую мы обозначим как ρ_{ik}) и антисимметричную, дуальную некоторому аксиальному вектору \vec{b} :

$$E_i = \rho_{ik} j_k + [\vec{j}\vec{b}]_i. \quad (2.75)$$

Тензор ρ_{ik} и вектор \vec{b} обладают такими же свойствами, как и s_{ik} и \vec{a} . В частности, в слабых полях вектор \vec{b} линеен по магнитному полю. В формулах (2.74) эффект Холла представляется членом $[\vec{j}\vec{b}]$, т. е. появлением электрического поля, перпендикулярного к току и по величине пропорционального магнитному полю и току \vec{j} .

Все написанные выше соотношения очень упрощаются, если проводник изотропен. В этом случае из соображений симметрии очевидно, что вектор \vec{b} (или \vec{a}) может быть направлен только вдоль магнитного поля. Единственными же отличными от нуля компонентами тензора ρ_{ik} являются $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ и ρ_{zz} , где ось z выбрана вдоль направления поля. Обозначив эти две величины посредством ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} и выбрав плоскость xz проходящей через направление тока, будем иметь

$$E_x = \rho_{\perp} j_x, \quad E_y = -b j_x, \quad E_z = \rho_{\parallel} j_z. \quad (2.76)$$

Отсюда видно, что в изотропном проводнике холловское поле есть единственное электрическое поле, перпендикулярное одновременно току и магнитному полю.

В слабых магнитных полях связь векторов \vec{b} и \vec{H} дается (в изотропном теле) просто соотношением

$$\vec{b} = -R\vec{H}. \quad (2.77)$$

Постоянная R (постоянная Холла) может быть как положительной, так и отрицательной. Что касается квадратичных по \vec{H} членов в зависимости между \vec{E} и \vec{j} (входящих через тензор ρ_{ik}), то их вид ясен из того, что единственными векторами, которые можно составить из \vec{j} и \vec{H} (линейными по \vec{j} и квадратичными по \vec{H}) являются $\vec{H}(\vec{j}\vec{H})$ и $\vec{j}H^2$. Поэтому

$$\vec{E} = \rho^{(0)}\vec{j} + R[\vec{H}\vec{j}] + \beta_1\vec{j}H^2 + \beta_2\vec{H}(\vec{H}\vec{j}) \quad (2.78)$$

— общий вид зависимости между \vec{E} и \vec{j} в изотропном теле с учетом квадратичных по \vec{H} членов.

2.7. Статическое магнитное поле в сплошной среде

Постоянное магнитное поле в материальных средах описывается двумя уравнениями Максвелла, которые получаются путем усреднения микроскопических уравнений

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v}. \quad (2.79)$$

Среднюю напряженность магнитного поля принято называть **магнитной индукцией** и обозначать как

$$\vec{h} = \vec{B}. \quad (2.80)$$

Поэтому результат усреднения первого из уравнений (29.1) будет иметь вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.81)$$

Во втором же уравнении производная по времени при усреднении исчезает, поскольку среднее поле предполагается постоянным, так что имеем

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \vec{v}}. \quad (2.82)$$

Среднее значение микроскопической плотности тока, вообще говоря, отлично от нуля как в проводниках, так и в диэлектриках. Разница между этими двумя категориями тел заключается лишь в том, что в диэлектриках всегда

$$\int \overline{\rho \vec{v}} d\vec{s} = 0, \quad (2.83)$$

где интеграл берется по полной площади любого поперечного сечения тела; в проводниках же этот интеграл может быть отличным от нуля. Предположим сначала, что в теле (если оно является проводником) отсутствует полный ток, т. е. справедливо соотношение (2.83).

Равенство нулю интеграла (2.83) по любому сечению тела означает, что вектор $\overline{\rho \vec{v}}$ может быть написан в виде ротора некоторого другого вектора, который принято обозначать как $c\vec{M}$:

$$\overline{\rho \vec{v}} = c \operatorname{rot} \vec{M}, \quad (2.84)$$

причем величина \vec{M} отлична от нуля только внутри тела. Действительно, интегрируя по поверхности, ограниченной контуром, охватывающим тело и проходящим везде вне его, получим

$$\int \overline{\rho \vec{v}} d\vec{s} = \int c \operatorname{rot} \vec{M} d\vec{s} = c \oint \vec{M} d\vec{l} = 0, \quad (2.85)$$

Вектор \vec{M} называют **намагниченностью** тела. Вводя его в уравнение (2.82), получим

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad (2.86)$$

где вектор \vec{H} связан с магнитной индукцией \vec{B} соотношением

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}, \quad (2.87)$$

аналогичным соотношению между электрической индукцией \vec{D} и напряженностью \vec{E} . Хотя вектор \vec{H} , по аналогии с \vec{E} , называют обычно **напряженно-**

стью магнитного поля, следует помнить, что в действительности истинное среднее значение напряженности есть \vec{B} , а не \vec{H} .

Для выяснения физического смысла величины \vec{M} рассмотрим полный магнитный момент, создаваемый всеми движущимися внутри тела заряженными частицами. По определению магнитного момента, это есть интеграл

$$\frac{1}{2c} \int [\vec{r} \overline{\rho \vec{v}}] dV = \frac{1}{2} \int [\vec{r} \text{rot } \vec{M}] dV. \quad (2.88)$$

Поскольку вне тела $\overline{\rho \vec{v}} = 0$, то интеграл можно брать по любому объему, выходящему за пределы тела. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\int [\vec{r} [\nabla \vec{M}]] dV = \oint [\vec{r} [d\vec{s} \vec{M}]] - \int [[\vec{M} \nabla] \vec{r}] dV. \quad (2.89)$$

Интеграл по поверхности, проходящей вне тела, обращается в нуль. Во втором же члене имеем

$$[[\vec{M} \nabla] \vec{r}] = -\vec{M} \text{div } \vec{r} + \vec{M} = -2\vec{M}. \quad (2.90)$$

Таким образом, получаем в результате

$$\frac{1}{2c} \int [\vec{r} \overline{\rho \vec{v}}] dV = \int \vec{M} dV. \quad (2.91)$$

Мы видим, что вектор намагниченности представляет собой магнитный момент единицы объема тела.

К уравнениям (2.81) и (2.86) должно быть присоединено соотношение, связывающее между собой величины \vec{H} и \vec{B} ; лишь после этого система уравнений станет полной. В неферромагнитных телах, в не слишком сильных магнитных полях, \vec{B} и \vec{H} связаны друг с другом линейным соотношением. У изотропных тел линейная связь сводится к простой пропорциональности

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (2.92)$$

Коэффициент μ называется **магнитной проницаемостью**, а коэффициент пропорциональности

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi} \quad (2.93)$$

в соотношении $\vec{M} = \chi \vec{H}$ — **магнитной восприимчивостью**.

В противоположность диэлектрической проницаемости ϵ , которая у всех тел превышает 1, магнитная проницаемость может быть как больше, так и меньше единицы. Можно только утверждать, что всегда $\mu > 0$. Соответственно магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной.

Другое отличие — количественное — состоит в том, что магнитная восприимчивость огромного большинства тел очень мала по сравнению с их диэлектрической восприимчивостью. Это отличие связано с тем, что намагниченность вещества (не ферромагнитного) является релятивистским эффектом второго порядка по v/c (v — электронные скорости в атомах).

В анизотропных телах, кристаллах, простая пропорциональность (2.92) заменяется линейными соотношениями

$$B_i = \mu_{ik} H_k. \quad (2.94)$$

Тензор магнитной проницаемости μ_{ik} симметричен. Это следует из термодинамических соотношений, которые выводятся точно так же, как была доказана симметричность тензора ϵ_{ik} .

Из уравнений $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{H} = 0$ следует, что на границе двух различных сред должны выполняться условия

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \vec{H}_{1n} = \vec{H}_{2n} \quad (2.95)$$

Эта система уравнений и граничных условий к ним формально совпадает с системой уравнений, определяющих электростатическое поле в диэлектриках в отсутствие свободных зарядов, отличаясь от них лишь заменой \vec{E} и \vec{D} соответственно на \vec{H} и \vec{B} . Ввиду уравнения $\text{rot } \vec{H} = 0$ можно искать \vec{H} в виде $\vec{H} = -\text{grad } \varphi$, и для потенциала φ получаются те же уравнения, что и для электростатического потенциала.

Тангенциальные компоненты магнитной индукции, в противоположность ее нормальной компоненте, испытывают скачок на поверхности раздела двух сред. Величину этого скачка можно связать с плотностью токов, протекающих по поверхности.

Если в проводнике течет отличный от нуля полный ток, то средняя плотность тока в нем может быть представлена в виде суммы

$$\overline{\rho \vec{v}} = c \text{rot } \vec{M} + \vec{j}, \quad (2.96)$$

Первый член, связанный с намагниченностью среды, не дает вклада в полный ток, так что полный перенос заряда через поперечное сечение тела определяется интегралом $\int \vec{j} d\vec{s}$ только от второго члена. Величину \vec{j} называют **плотностью тока проводимости**. Именно к ней относится все сказанное ранее о плотности тока \vec{j} , в частности, энергия, диссипируемая в единицу времени в единице объема, равна $\vec{E}\vec{j}$.

Распределение тока \vec{j} по объему проводника определяется указанными ранее уравнениями, в которые не входит создаваемое этими же токами магнитное поле (при условии пренебрежения влиянием поля на свойства проводимости самого металла). Поэтому задача об определении магнитного поля токов должна решаться по заданному распределению последних. Уравнения Максвелла тогда принимают вид:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2.97)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (2.98)$$

Плотность тока проводимости \vec{j} , пропорциональная напряженности электрического поля, является величиной ограниченной, не обращающейся в бесконечность, в частности и на границе раздела двух сред. Поэтому наличие правой части в уравнении (2.98) не отражается на граничном условии непрерывности тангенциальных компонент \vec{H} .

Для решения полученных уравнений удобно ввести векторный потенциал \vec{A} , положив

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (2.99)$$

в результате чего уравнение (2.97) удовлетворяется тождественно. Равенством (2.99) векторный потенциал еще не определяется однозначно. К нему можно прибавить, не нарушая (2.99), любой вектор вида $\operatorname{grad} f$. Ввиду этой неоднозначности можно наложить на \vec{A} одно дополнительное условие, в качестве которого выберем

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (2.100)$$

Тогда при линейной связи $\vec{B} = \mu \vec{H}$ имеем

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (2.101)$$

В таком виде это уравнение справедливо для любой неоднородной среды.

В однородной среде $\mu = const$, и поскольку $\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$, то уравнение (30.5) приводится к виду

$$\Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}. \quad (2.102)$$

2.8. Самоиндукция и взаимоиנדукция

Рассмотрим систему проводников с текущими по ним токами в неферромагнитной среде, так что везде $\vec{B} = \mu\vec{H}$. Тогда энергия (свободная энергия) такой системы

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H}\vec{B}dV. \quad (2.103)$$

Интегрирование здесь проводится по всему пространству, включая объемы проводников. Если учесть, что $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, то

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{H}\text{rot}\vec{A}dV = \frac{1}{8\pi} \int \text{div}[\vec{H}\vec{A}]dV + \frac{1}{8\pi} \int \vec{A}\text{rot}\vec{H}dV. \quad (2.104)$$

Первый интеграл по теореме Остроградского-Гаусса равен интегралу по бесконечно удаленной поверхности, который, в свою очередь, равен нулю при условии достаточно быстрого убывания \vec{A} на бесконечности (ограниченность системы токов). С помощью второго интеграла, используя уравнения Максвелла, окончательно получаем

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{A}\text{rot}\vec{H}dV = \frac{1}{2c} \int \vec{A}\vec{j}dV. \quad (2.105)$$

Интегрирование здесь, очевидно, достаточно проводить только по области с $\vec{j} \neq 0$, то есть только по объемам проводников.

В силу принципа суперпозиции магнитное поле есть сумма магнитных полей, создаваемых по отдельности каждым проводником $\vec{A} = \sum \vec{A}_\alpha$, тогда

$$W = \frac{1}{2c} \sum_\alpha \int \vec{A}_\alpha \vec{j}_\alpha dV_\alpha + \frac{1}{c} \sum_{\alpha > \beta} \int \vec{A}_\beta \vec{j}_\alpha dV_\alpha. \quad (2.106)$$

Причем нетрудно показать, что

$$\int \vec{A}_\beta \vec{j}_\alpha dV_\alpha = \int \vec{H}_\alpha \vec{B}_\beta dV = \int \vec{H}_\beta \vec{B}_\alpha dV = \int \vec{A}_\alpha \vec{j}_\beta dV_\beta . \quad (2.107)$$

Отметим, что индекс у элемента объема интегрирования означает, что интеграл берется только по объему этого проводника.

При заданном законе распределения плотности тока по объемам проводников значение энергии зависит только от величин протекающих по ним полных токов J_α . Тогда энергия, очевидно, выражается в виде следующей квадратичной формы:

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha} L_{\alpha\alpha} J_{\alpha}^2 + \frac{1}{c^2} \sum_{\alpha > \beta} L_{\alpha\beta} J_{\alpha} J_{\beta} . \quad (2.108)$$

При указанных коэффициентах $L_{\alpha\alpha}$ называется **коэффициентом самоиндукции** проводника, а $L_{\alpha\beta}$ - **коэффициентом взаимной индукции** проводников. Если не выделять эти коэффициенты по отдельности, то

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} J_{\alpha} J_{\beta} . \quad (2.109)$$

Очевидное условие положительной определенности этой квадратичной формы накладывает ряд ограничений на значения коэффициентов. В частности, все

$$L_{\alpha\alpha} > 0, \text{ и } L_{\alpha\alpha} L_{\beta\beta} > L_{\alpha\beta}^2 . \quad (2.110)$$

Вычисление энергии токов в общем случае произвольных массивных проводников – достаточно сложная задача магнитостатики. Она существенно упрощается, если мы можем считать магнитную проницаемость μ всюду постоянной – как в среде, так и в самих проводниках. В этом случае она не влияет на отношения токов или потенциалов и ее можно считать равной 1. Тогда, по аналогии с электростатикой, решение уравнения

$$\Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.111)$$

можно записать как

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} dV}{|\vec{R} - \vec{r}|} \quad (2.112)$$

и выражение (2.106) принимает вид

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \iint \frac{\vec{j}_{\alpha} \vec{j}_{\beta}}{|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} dV_{\alpha} dV_{\beta}, \quad (2.113)$$

где интегрирования проводятся по соответствующим объемам проводников.

В качестве примера вычислим взаимную энергию двух линейных токов. Переход от объемных токов к линейным осуществляется очевидной заменой $\vec{j} dV = J d\vec{l}$, где вектор $d\vec{l}$ - касательный к проводнику. Тогда

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} J_{\alpha} J_{\beta} \oint \oint \frac{d\vec{l}_{\alpha} d\vec{l}_{\beta}}{|\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|}. \quad (2.114)$$

Следовательно, $L_{\alpha\beta}$ зависит только от формы, размера и взаимного расположения контуров и является их геометрической характеристикой.

При $\alpha = \beta$ в (2.114) получается расходящийся интеграл и, следовательно, мы не можем пренебречь толщиной проводника при вычислении его коэффициента самоиндукции. Для расчета коэффициента самоиндукции воспользуемся тем, что большая часть энергии линейного проводника сосредоточена вне его, что видно из анализа выражения

$$W = \frac{1}{2c} \int \vec{H} \vec{B} dV \quad (2.115)$$

в случае бесконечного прямого провода. Достаточно тонкий линейный проводник мы можем представить как состоящий из участков бесконечного прямого провода. Но для него энергия на единицу длины

$$w = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 2\pi r dr = \frac{\mu}{8\pi} \int \left(\frac{2J}{cr} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu J^2}{c^2} \int \frac{dr}{r}, \quad (2.116)$$

где r - расстояние до оси провода, μ - магнитная проницаемость внешней среды - логарифмически расходится при больших r . Понятно, что для замкнутого контура эта расходимость исчезнет, поскольку интеграл «обрежется» на размерах контура, где приближение контура прямым проводом уже будет неверным. Тем не менее, можно сделать вывод, что большая часть энергии

магнитного поля сосредоточена вне проводника. Тогда мы можем получить приближенное значение энергии, умножив (2.116) на длину провода l и взяв для верхнего предела значение l , а для нижнего – радиус провода a :

$$W = \frac{\mu J^2}{c^2} l \ln \frac{l}{a}. \quad (2.117)$$

Тогда самоиндукция

$$L = 2\mu l \ln \frac{l}{a}. \quad (2.118)$$

Это выражение обладает **логарифмической точностью**: его относительная погрешность – порядка $1/\ln(l/a)$, и мы считаем, в рассматриваемых случаях l/a достаточно велико.

На практике применяется катушка (**соленоид**) - особый случай линейного проводника, когда провод плотно намотан по спирали. Пренебрегая толщиной провода и расстоянием между витками, мы получаем цилиндрическую проводящую поверхность, по угловой касательной которой течет ток. При таком рассмотрении мы имеем стандартные граничные условия для \vec{H} на поверхности цилиндра:

$$[\vec{n}(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (2.119)$$

где \vec{j} в данном случае – поверхностная плотность тока, \vec{H}_1 и \vec{H}_2 - напряженности поля по обе стороны поверхности соленоида, а нормаль \vec{n} направлена на среду 2.

Если соленоид представляет собой бесконечный цилиндр, то нетрудно догадаться до решения: поле вне соленоида равно нулю, а внутри соленоида постоянно, направлено вдоль его оси и равно

$$H = \frac{4\pi}{c} nJ, \quad (2.120)$$

где n - число витков на единицу длины соленоида, J - ток. Действительно, такое поле удовлетворяет как граничным условиям, так и уравнениям Максвелла. Энергия на единицу длины такого цилиндра

$$W = \frac{\mu H^2}{8\pi} \pi b^2 = \frac{2\pi^2 \mu n^2 b^2}{c^2} J^2. \quad (2.121)$$

Здесь b - радиус цилиндра, μ - магнитная проницаемость заполняющей цилиндра среды. Если пренебречь искажениями поля на концах соленоида, то есть, для достаточно длинного по сравнению со своим радиусом соленоида длины h , окончательно получаем

$$L = 4\pi^2 \mu n^2 b^2 h = 2\pi \mu n b l, \quad (2.122)$$

где l - длина провода в катушке. Мы видим существенное увеличение индуктивности катушки по сравнению с индуктивностью прямого провода, что объясняется большой взаимной индукцией близко расположенных витков провода.

Контрольные вопросы

1. Записать уравнения Максвелла в случае электростатики проводников.
2. Записать уравнения Лапласа и Пуассона.
3. Записать граничные условия на поверхности проводника.
4. Основная идея метода изображений. Какие задачи он решает?
5. Что такое метод инверсии? Какие задачи он решает?
6. Описать метод конформных отображений. Какие задачи он решает?
7. Записать уравнения Максвелла в случае электростатики диэлектриков.
8. Что такое поляризация диэлектрика?
9. Что такое диэлектрическая проницаемость?
10. Что такое диэлектрическая восприимчивость?
11. Записать граничные условия на границе диэлектрика.
12. Записать уравнения Максвелла для анизотропных диэлектриков.
13. Что такое тензор проводимости?
14. Рассказать принцип симметрии кинетических коэффициентов.
15. Что такое эффект Холла?
16. Записать уравнения Максвелла в случае магнитостатики
17. Что такое намагниченность?
18. Что такое магнитная проницаемость?
19. Что такое магнитная восприимчивость?
20. Записать граничные условия на границе магнетика.
21. Что такое коэффициент самоиндукции?

Глава 3. Магнитная гидродинамика

Предметом изучения магнитной гидродинамики является поведение проводящей жидкости в магнитном поле. Взаимосвязь гидродинамических и электромагнитных явлений обусловлена тем, что механическое течение проводящей жидкости одновременно есть электрический ток, на который со стороны магнитного поля действует сила Лоренца [2]. С другой стороны, изменение тока само меняет магнитное поле в среде. Таким образом, необходимо решать совместно систему уравнений Максвелла и уравнений гидродинамики.

3.1. Основные уравнения магнитной гидродинамики

Наряду с уравнениями Максвелла для проводящей среды

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

Необходимо записать закон Ома для движущихся проводников. Пусть движение прямолинейное и равномерное, тогда в движущейся системе отсчета k' имеем обычную линейную связь для неподвижного проводника,

$$\vec{j}' = \sigma \vec{E}' \quad (3.4)$$

где σ — удельная проводимость. С помощью преобразований Лоренца $\vec{E}' = \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ перейдем в лабораторную систему k

Предполагая $v \ll c$, получаем обобщение закона Ома для движущихся проводников

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (3.5)$$

Запишем теперь уравнения гидродинамики. Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad (3.6)$$

где ρ - плотность жидкости, в данном случае совпадает и с уравнением непрерывности в электродинамике, поскольку жидкость заряжена и плотность заряда пропорциональна ρ .

Уравнение движения жидкости (аналог уравнения Ньютона) дается уравнением Навье-Стокса:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{F}_{ext}. \quad (3.7)$$

Здесь слева стоит полная производная скорости по времени

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v},$$

отличающаяся от частной за счет конвективного вклада $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$. Полная плотность силы в правой части складывается из потенциальной силы ($-\operatorname{grad} p$, p – давление в жидкости), силы трения с коэффициентами вязкости η и ζ и объемной плотности внешней силы F_{ext} . Во внешнем электромагнитном поле F_{ext} определяется как среднее от микроскопической силы Лоренца:

$$\vec{F}_{ext} = \left\langle \rho_{\text{микро}} \left(\vec{E}_{\text{микро}} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H}_{\text{микро}} \right) \right\rangle = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{B}. \quad (3.8)$$

Кроме того, необходимо записать уравнение состояния, связывающее давление, плотность и температуру T :

$$p = p(\rho, T), \quad (3.9)$$

закон сохранения энергии

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (3.10)$$

с тензором энергии импульса $T^{\mu\nu}$ жидкости.

Во многих случаях скорости всех движений малы по сравнению со скоростью звука $u_0 = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$, тогда жидкость можно считать несжимаемой. В этом случае уравнение непрерывности, уравнение состояния и закон сохранения энергии переходят в условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (3.11)$$

Итак, связь между электромагнитными и гидродинамическими явлениями обусловлена плотностью внешних сил электромагнитного происхождения в уравнении Навье-Стокса, а в уравнениях Максвелла – зависимость плотности тока \vec{j} от характера движения среды.

3.2. Эффект увлечения магнитного потока хорошо проводящей жидкостью. Магнитная вязкость

Рассмотрим сначала этот эффект качественно, а потом опишем количественно. В пределе $\sigma \rightarrow \infty$ из закона Ома (3.1.4) следует $\vec{E}' = 0$, иначе ток будет бесконечно большим. Таким образом, в системе k' , где проводящая среда неподвижна, поле равно нулю (как и в электростатике) и не меняется со временем. Поэтому ЭДС по любому замкнутому контуру в жидкости равна нулю, значит магнитный ток через площадку, ограниченную данным контуром, не меняется и постоянен. В результате магнитный поток как бы «вморожен» в данную локальную область перемещающейся жидкости («жидкую частицу»). В этом и есть эффект увлечения потока идеально проводящей жидкостью. С микроскопической точки зрения, очевидно, что давление «жидкой частицы» складывается из перемещения микроскопических заряженных частиц: ионов, электронов, протонов и т.п. Бесконечная проводимость (нулевое сопротивление) означает, что микроскопические частицы движутся без рассеяния и столкновений, а это означает, что магнитный поток, создаваемый частицами, также движется вместе с ними.

Такая микроскопическая картина легко позволяет понять, что происходит с потоком в реальном случае, когда сопротивление отлично от нуля. Частицы рассеиваются, и часть из них выбывает из процесса переноса тока. Вместе с ними выбывает и часть магнитного потока, он частично «размораживается». Оказывается, что «размораживание» потока описывается процессом диффузии. Из уравнений Максвелла запишем:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), \quad (3.12)$$

откуда

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.13)$$

подставляя (3.13) в (3.3), находим

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} = \frac{c}{4\pi} \text{rot}(\text{rot } \vec{B}/\sigma) - \frac{1}{c} \text{rot } \vec{v} \times \vec{B}.$$

Для пространственно однородной среды проводимость σ не зависит от координат. Вычисляя, как обычно, $\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B}$, получаем

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{v} \times \vec{B} + \nu_m \Delta \vec{B}. \quad (3.14)$$

Здесь $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ - магнитная вязкость. В пределе $\sigma \rightarrow \infty$ вязкость $\nu_m \rightarrow 0$ и в правой части (3.14) остается только конвективное слагаемое, ответственное за замораживание потока. В реальной жидкости $\nu_m \neq 0$. Если бы конвективный член в правой части отсутствовал, то мы бы получили самое обычное уравнение диффузии $\partial \vec{B}/\partial t = \nu_m \Delta \vec{B}$. На самом деле, оба слагаемые вносят свой вклад в динамику магнитного поля.

В гидродинамике для оценки роли конвективных вкладов вводят число Рейнольдса R . При $R \gg 1$ можно пренебречь вязкостью, и течение жидкости ламинарное с плавными линиями тока. При $R_m \ll 1$, наоборот, вязкие процессы преобладают, течение становится турбулентным с хаотическими линиями тока. В магнитной гидродинамике введем по аналогии магнитное число Рейнольдса, определяемое отношением конвективного вклада в (3.14) к вязкому:

$$\frac{\text{rot } \vec{v} \times \vec{B}}{\nu_m \Delta \vec{B}} \sim \frac{L^{-1} \nu B}{\nu_m L^{-2} B} = \frac{L \nu}{\nu_m} \equiv R_m. \quad (3.15)$$

Здесь производные оценивались следующим образом: $\partial/0x \sim L^{-1}$, $\Delta \sim L^{-2}$, где L - характерный размер системы. При $R_m \gg 1$ можно пренебречь диффузией, и реализуется эффект увлечения магнитного потока. При $R_m \ll 1$ диффузия разрушает замороженный поток.

Рассмотрим для примера плазму, образованную межзвездным газом. Характерный размер $L \sim 10^{20}$ см, магнитная вязкость $\nu_m \sim 10^7$ см²/сек. В результате уже при скорости $\nu \geq 10^{-12}$ см/сек $R_m \gg 1$. На самом деле характерная скорость частиц составляет заметную долю от скорости света C . Таким образом, для межзвездной плазмы всегда выполняется условие $R_m \gg 1$. Оче-

видно, что это есть следствие большой разреженности газа, типичная длина свободного пробега $l \sim 10^{12}$ см. В связи с этим примером необходимо отметить, что применение магнитной гидродинамики к задачам физики плазмы (то есть приближение сплошной среды) ограничено условием $l \ll L$. Это означает, что частицы многократно сталкиваются, проходя всю систему с масштабом L . Поэтому и происходит усреднение микроскопических движений. В противном случае $l \gg L$ частицы пронизывают всю систему, и вместо уравнений сплошной среды необходимо переходить к кинетической теории, следя за движением каждой частицы.

3.3. Магнитогидродинамические волны

Рассмотрим распространение малых возмущений в однородной проводящей жидкости, находящейся в однородном постоянном поле \vec{H}_0 . Предположим, что $R \gg 1$ и $R_m \gg 1$, и пренебрежем всеми диссипативными процессами. В результате полная система уравнений из раздела 3.1 упрощается и принимает вид (считаем среду немагнитной, $\mu=1$, $\vec{B} = \vec{H}$):

$$\operatorname{div} H = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{H} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H} \quad (3.19)$$

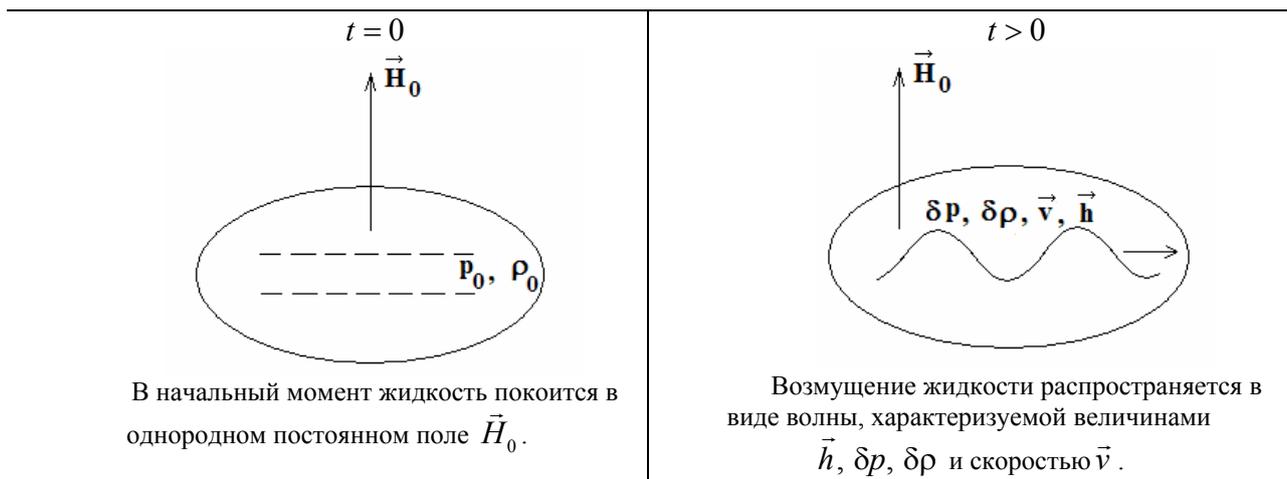


Рис. 3.1. Схема возникновения МГД-волн.

В покоящемся начальном состоянии $v = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ и $\vec{H} = \vec{H}_0$. После возникновения возмущения (рис. 3.1) в среде распространяется волна с колебаниями скорости $\vec{v} \neq 0$, давления $\delta p = p - p_0$, плотности $\delta \rho = \rho - \rho_0$ и магнитного поля $\vec{h} = \vec{H} - \vec{H}_0$. Предполагая амплитуду волны малой, линеаризуем уравнения (3.3.1-3.3.4) по параметрам \vec{v} , δp , $\delta \rho$ и \vec{h} . Учтем также, что из-за отсутствия диссипации процесс является адиабатическим, и в уравнении состояния (3.9) остается только зависимость давления от плотности (здесь u_0 - скорость звука):

$$\delta p = u_0^2 \delta \rho. \quad (3.20)$$

Линеаризованная система уравнений может быть записана в виде:

$$\text{div } \vec{h} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \text{rot } \vec{v} \times \vec{H}_0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{u_0^2}{\rho_0} \vec{\nabla} \delta \rho + \frac{1}{4\pi\rho_0} \text{rot } \vec{h} \times \vec{H}_0 \quad (3.24)$$

Для решений в виде волны $\sim \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ система (3.21-3.24) преобразуется следующим образом:

$$\vec{k} \cdot \vec{h} = 0 \quad (3.25)$$

$$-\omega \vec{h} = \vec{k} \times (\vec{v} \times \vec{H}_0) \quad (3.26)$$

$$\omega \delta \rho = \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (3.27)$$

$$-\omega \vec{v} + \frac{u_0^2}{\rho_0} \vec{k} \delta \rho = -\frac{1}{4\pi\rho_0} \vec{H}_0 \times (\vec{k} \times \vec{h}). \quad (3.28)$$

Выберем ось x вдоль вектора \vec{k} . Плоскость, проходящая через вектора \vec{k} и \vec{H}_0 , обозначим через xu . Согласно (3.25) $\vec{k} \perp \vec{h}$. Таким образом, три вектора \vec{k} , \vec{H}_0 и \vec{h} имеют следующие проекции

$$\vec{k} = (k, 0, 0), \quad \vec{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, 0), \quad \vec{h} = (0, h_y, h_z).$$

Введем также фазовую скорость волны $u = \omega/k$. Из (3.27) найдем

$$\delta\rho/\rho_0 = v_x/u. \quad (3.29)$$

Для оставшихся 5 неизвестных: трех компонент вектора \vec{v} и двух вектора \vec{h} система уравнений (3.26-3.28) распадается на две подсистемы: два уравнения на v_z и h_z

$$\left. \begin{aligned} uh_z + H_{0x}v_z &= 0 \\ \frac{H_{0x}}{4\pi\rho_0}h_z + uv_z &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.30)$$

и три уравнения на v_x , v_y и h_y

$$\left. \begin{aligned} (u^2 - u_0^2)v_x + \frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0}h_y &= 0 \\ uv_y + \frac{H_{0x}}{4\pi\rho_0}h_y &= 0 \\ H_{0y}v_x - H_{0x}v_y - uh_y &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.31)$$

Нетривиальные решения этих систем однородных уравнений определяются из равенства определителя нулю, что дает уравнения на фазовую скорость. Для системы (3.30) находим

$$u = u_A = \frac{H_{0x}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad \omega_A = \frac{\vec{H}_0 \cdot \vec{k}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad (3.32)$$

такие волны называются альфеновскими (ван Альфен). Для системы (3.31) равенство нулю определителя дает биквадратное уравнение на фазовую скорость

$$(u^2 - u_0^2) \left(u^2 - \frac{H_{0y}^2}{4\pi\rho_0} \right) = \frac{u^2 H_{0y}^2}{4\pi\rho_0},$$

решение которого определяет быстрые (+) и медленные (-) магнитозвуковые волны

$$u_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} + u_0^2 \pm \left[\left(\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} - u_0^2 \right)^2 - \frac{H_{0x}^2 u_0^2}{4\pi\rho} \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.3.18) \quad (3.33)$$

Альфеновские волны являются поперечными, так как сопровождаются колебаниями величин v_z и h_z . Магнитозвуковые нельзя в общем случае разделить на продольные и поперечные, так как в колебаниях принимают участие, как продольная компонента v_x , так и поперечные v_y и h_y . При выполнении условия

$$H_0^2 \ll 4\pi\rho_0 u_0^2 \quad u_+ \approx u_0, \quad u_- \approx u_A, \quad (3.34)$$

волны разделяются: быстрая превращается в продольную звуковую с колебаниями v_x , плотности $\delta\rho$ и давления δp с частотой $\omega = u_0 k$, а медленная с колебаниями h_y и v_y превращается в альфеновскую поперечную волну. В несжимаемой жидкости $u_0 \rightarrow \infty$, так что остаются только альфеновские колебания с $\vec{v} = -\vec{h}/4\pi\rho_0$.

Контрольные вопросы

1. Какой класс явлений описывает магнитная гидродинамика?
2. Что обуславливает связь магнитных и гидродинамических степеней свободы в уравнениях магнитной гидродинамики?
3. Когда имеет место эффект увлечения магнитного потока?
4. При каких значениях магнитного числа Рейнольдса магнитное поле в жидкости диффундирует?
5. В каком приближении уравнения магнитной гидродинамики имеют решения в виде МГД-волн?
6. Чем отличается альфеновская волна от магнитозвуковой?
7. Во что превращаются магнитозвуковые волны в случае малого внешнего магнитного поля?

Глава 4. Электромагнитные волны в сплошной среде

4.1 Низкочастотное поле в диэлектриках

Рассмотрим переменное электромагнитное поле в диэлектрической среде в отсутствие зарядов и токов

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Пусть связь между индукциями (\vec{D} и \vec{B}) и полями (\vec{E} и \vec{H}) остается еще такой же, как в постоянных полях, то есть, сводится к простой пропорциональности

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (4.2)$$

где значения ε и μ такие же, что и в стационарных полях.

Эти соотношения нарушаются (говорят о появлении дисперсии ε и μ) на частотах ω сравнимых с собственными частотами ω_0 молекулярных или электронных колебаний в среде. Порядок величины этих частот сильно зависит от рода вещества и может сильно меняться при переходе к другому типу вещества. Таким образом, соотношения (4.2) выполняются только в низкочастотном пределе при $\omega \ll \omega_0 \approx \frac{1}{\tau_0}$, где τ_0 — время установления поляризации среды (время релаксации).

В этом низкочастотном пределе уравнения распространения электромагнитных волн в однородной среде мало отличаются от аналогичных уравнений, полученных для волн в вакууме. Действительно, вычисляя $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ из уравнений Максвелла, а также с помощью соотношения векторного анализа $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$, в котором для однородной среды $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ получим волновое уравнение для напряженности электрического поля

$$\Delta \vec{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (4.3)$$

Продельвая то же самое с выражением $\text{rot}\vec{H}$, получим волновое уравнение для напряженности магнитного поля

$$\Delta\vec{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (4.4)$$

Уравнения (4.3) и (4.4) отличаются от аналогичных волновых уравнений в вакууме перенормировкой величины скорости волны. Вместо скорости света в вакууме c появляется скорость волны в сплошной среде $c_c = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$,

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель преломления среды.

Плотность потока энергии электромагнитной волны в неподвижной среде вычисляется аналогично потоку энергии волны в вакууме $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$, а плотность энергии волны в диэлектрической среде равна $dU = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B})$. Вычисляя $\frac{\partial U}{\partial t}$ и сравнивая с $\text{div} \vec{S}$, получим уравнение непрерывности в виде закона сохранения энергии

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = 0. \quad (4.5)$$

Медленность изменения поля позволяет воспользоваться для тензора напряжений прежними выражениями, полученными для постоянного поля, но при дифференцировании этих выражений по координатам следует учесть, что вместо уравнений $\text{rot}\vec{E} = 0$, $\text{rot}\vec{H} = 0$ теперь следует воспользоваться уравнениями (4.1).

4.2 Переменное поле в диэлектриках с учетом эффектов запаздывания.

Значительно больший интерес вызывает рассмотрение быстропеременных электромагнитных полей, частоты которых не ограничены условием малости по сравнению с собственными частотами, характерными для данного вещества.

Поляризация вещества, в конечном итоге, связана со смещением зарядов (в основном электронов) в среде. В силу конечности массы носителей заряда и, следовательно, инерционности их движения, смещение зарядов (поляризация) определяется не мгновенным значением напряженности поля, а зависит от предыстории полей. На языке механики смещение частицы в момент времени t определяется не только величиной силы в данный момент времени, но и зависит от того, какой была эта сила в предшествующие моменты време-

ни. В случае линейной связи поляризации с величиной поля эту зависимость можно описать в следующем виде

$$4\pi\vec{P}(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)\vec{E}(t-\tau) \cdot d\tau, \quad (4.6)$$

где $f(\tau)$ – функция времени, зависящая от свойств данной среды и стремящаяся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Можно сказать, что $f(\tau)$ весовая функция каждого прошлого момента времени. Она определяется механизмом поляризации. Тогда индукция электрического поля

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + 4\pi\vec{P}(t) = \vec{E}(t) + \int_0^{\infty} f(\tau)\vec{E}(t-\tau) \cdot d\tau \quad (4.7)$$

перестает быть пропорциональной напряженности поля $\vec{E}(t)$ и соотношения (4.2) нарушаются.

Выходом из положения является переход к Фурье компонентам поляризации, индукции и напряженности.

$$\vec{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau; \quad \vec{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau; \quad \vec{D}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau; \quad (4.8)$$

Действительно, выражение (4.6) похоже на свертку двух функций

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(y-x) \cdot dx, \quad (4.9)$$

а Фурье преобразование свертки удовлетворяет соотношению

$$F(\omega) = f_1(\omega) \cdot f_2(\omega), \quad (4.10)$$

где $f(\omega)$ – Фурье образы соответствующих функций. По аналогии с доказательством теоремы о свертке выражение (4.6) преобразуется к виду $4\pi\vec{P}(\omega) = f(\omega) \cdot \vec{E}(\omega)$ (величина $f(\omega)$ играет в нем роль восприимчивости на частоте ω). Соотношение (4.7) принимает вид, внешне похожий на (4.2)

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \cdot \vec{E}(\omega), \quad (4.11)$$

где $\varepsilon(\omega)$ – зависящая от частоты диэлектрическая проницаемость среды, $\vec{D}(\omega)$ и $\vec{E}(\omega)$ – Фурье компоненты индукции и напряженности электрического поля. А величина диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(\omega)$ выражается через восприимчивость $f(\omega)$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + f(\omega), \quad (4.12)$$

где

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (4.13)$$

Нижний предел интегрирования в (4.13) при вычислении Фурье компоненты восприимчивости в отличие от (4.8) заменен на ноль в силу принципа причинности (или можно считать, что $f(\tau)$ равна тождественно нулю, при отрицательном τ).

Все изложенное выше применимо и к магнитному полю $\vec{H}(\omega)$, магнитной индукции $\vec{B}(\omega)$ и магнитной восприимчивости $\chi(\omega)$

$$\vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \cdot \vec{H}(\omega), \quad (4.14)$$

где

$$\mu(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (4.15)$$

есть зависящая от частоты магнитная проницаемость.

4.3 Дисперсия диэлектрической проницаемости. Соотношения Крамерса-Кронига.

Электрическая и магнитная проницаемости, определенные в (4.12) – (4.15) являются комплексными функциями частоты. Рассмотрим основные свойства этих функций на примере $\varepsilon(\omega)$.

Выделим в (4.12) действительную и мнимую части $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Тогда

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad \varepsilon''(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (4.16)$$

Отсюда видно, что $\varepsilon'(\omega)$ есть четная функция частоты, а $\varepsilon''(\omega)$ нечетная, так что выполняется соотношение

$$\varepsilon'(-\omega) + i\varepsilon''(-\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega). \quad (4.17)$$

Другими словами, разложение (асимптотика) в области малых частот для действительной и мнимой частей электрической проницаемости имеют различный вид

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'(0) + A\omega^2 + \dots; \quad \varepsilon''(\omega) = B\omega + \dots \quad (4.18)$$

Рассмотрим высокочастотный предел $\omega \rightarrow \infty$. Когда электрическое поле изменяется очень быстро, элементарные заряды не успевают смещаться вслед за полем, и поляризация вещества $f(\omega)$ стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Математически этот результат просто следует из (4.13) и леммы Ватсона, говорящей о том, что интеграл от быстро осциллирующей экспоненты стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

Можно оценить электрическую проницаемость вещества из простой классической модели, в которой движение внутренних, почти свободных зарядов описывается уравнением Ньютона. Энергия взаимодействия с полем на больших частотах велика по сравнению с энергией связи. Для одной заряженной частицы (электрона) имеем уравнение $m\ddot{r} = eE(t) = eE_0 e^{-i\omega t}$. Интегрируя это уравнение два раза, получим $r(t) = -\frac{e}{m\omega^2} E_0 e^{-i\omega t} = -\frac{e}{m\omega^2} E(t)$. Считая, что в единице объема содержится N таких электронов можно оценить поляризацию (дипольный момент единицы объема) как $\vec{P} = \sum e\vec{r} = eN\vec{r} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \vec{E}(t)$.

Тогда $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \left(1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}\right) \cdot \vec{E}$ и электрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}. \quad (4.19)$$

В пределе $\omega \rightarrow \infty$ электрическая проницаемость $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$.

Рассмотрим далее поведение восприимчивости $f(\omega)$ и электрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ при комплексных значениях $\omega = \omega' + i\omega''$ в верхней полуплоскости $\omega'' > 0$. Из определения $f(\omega)$ в (4.13) следует, что

$$f(\omega' + i\omega'') = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega'\tau - \omega''\tau} d\tau. \quad (4.20)$$

Интеграл в (4.20) заведомо сходится в верхней полуплоскости $\omega'' > 0$ и, следовательно, $f(\omega)$ и $\varepsilon(\omega)$ являются аналитическими функциями в верхней полуплоскости. Кроме того, $f(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega'' \rightarrow \infty$. Отметим, что в нижней полуплоскости при $\omega'' \rightarrow -\infty$ интеграл (4.20) является расходящимся. Свойство аналитичности $f(\omega)$ и $\varepsilon(\omega)$ при $\omega'' > 0$ является следствием принципа причинности, который ограничил пределы интегрирования в (4.20) условием $\tau > 0$.

Аналитичность $f(\omega)$ и $\varepsilon(\omega)$ при $\omega'' > 0$ позволяет доказать формулы Крамерса-Кронига. Рассмотрим следующий интеграл по замкнутому контуру, представленному на рис. 4.1

$$I = \oint \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega. \quad (4.21)$$

В силу отсутствия особых точек в верхней полуплоскости этот интеграл равен нулю. С другой стороны его можно разбить на сумму интегралов:

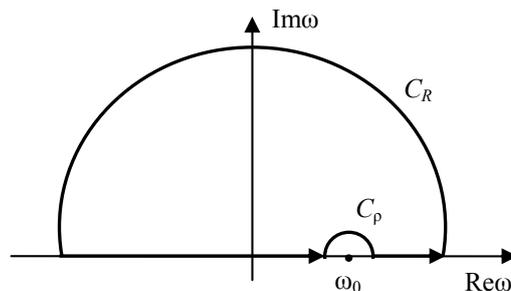


Рис. 4.1. Замкнутый контур интегрирования в комплексной плоскости Ω .

- 1) по действительной оси (главное значение интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega$);

2) интеграл по большой дуге C_R , который стремится к нулю в силу стремления к нулю восприимчивости $f(\omega)$ (для этого и пришлось писать в числителе $\varepsilon(\omega) - 1$);

3) интеграла по дуге вокруг полюса первого порядка в точке ω_0 , который равен

$$\int_{C_p} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega = -i\pi \cdot \operatorname{res} \left(\frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0}, \omega_0 \right) = -i\pi \cdot [\varepsilon(\omega_0) - 1]. \quad (4.22)$$

В итоге получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\omega - \omega_0} d\omega = i\pi \cdot [\varepsilon(\omega_0) - 1] \quad (4.23)$$

Выделяя в (4.23) действительную и мнимую части и расписывая $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$, выводим формулы Крамерса-Кронига

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \\ \varepsilon''(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon'(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \end{aligned} \quad (4.24)$$

Эти формулы связывают действительную и мнимую части электрической проницаемости для диэлектриков. Формулы Крамерса-Кронига можно записать и в несколько другом виде. Так разбив интеграл в (4.24) на первый в пределах от $-\infty$ до 0 и второй от 0 до ∞ и переобозначив переменную интегрирования в первом, получим

$$\varepsilon'(\omega_0) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \varepsilon''(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega. \quad (4.25)$$

В средах с электрической проводимостью в формулах Крамерса-Кронига следует учесть проводимость среды.

4.4 Распространение волн в диспергирующих средах

В низкочастотном пределе было $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ и волновое уравнение имело вид $\Delta \vec{E} + \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} \vec{E} = 0$. Выясним, что будет при учете дисперсии, когда

где $\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega)$ и $\vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega)$. В этом случае

$B(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(r, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega$, дифференцируя данное выражение, получим

$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(r, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega$. Вычисляя по известной формуле

$\text{rot rot } E = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$ с учетом, что $\text{div } E = 0$ находим из уравнений Максвелла волновое уравнение для электрического поля

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \frac{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0. \quad (4.26)$$

Это уравнение, точно такое же, что и волновое уравнение без дисперсии, но только для Фурье компонент $\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot e^{i\omega t} dt$.

Решение уравнения (4.26) в виде плоской волны

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (4.27)$$

приводит к соотношению $k^2 = \frac{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2}{c^2}$. В общем случае

$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ и $\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$ комплексные функции, следовательно, комплексным будет и волновой вектор $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$. Тогда (4.27) примет вид

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{k}'\vec{r}} \cdot e^{-\vec{k}''\vec{r}}. \quad (4.28)$$

Теперь осциллирующая часть волны умножается на затухающую экспоненту. Величина \vec{k}'' задает коэффициент затухания. Такие волны получили название неоднородные (затухающие) волны. Вывод: дисперсия $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ приводит к затуханию волны.

Для общего рассмотрения плоских волн в диспергирующей среде проведем в уравнениях Максвелла кратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{k}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(r, t) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} dt dV \\ \vec{H}(\vec{k}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}(r, t) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} dt dV\end{aligned}, \quad (4.29)$$

При этом $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t)$ перейдет в $-i[\vec{k}, \vec{E}(\vec{k}, \omega)]$, а производная $-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ перейдет в $-i \frac{\omega \mu}{c} \vec{H}(\vec{k}, \omega)$. И вместо уравнений $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ мы получим соотношения для Фурье компонент

$$i[\vec{k}, \vec{E}] = i \frac{\omega \mu}{c} \vec{H}, \quad i[\vec{k}, \vec{H}] = -i \frac{\omega \varepsilon}{c} \vec{E}. \quad (4.30)$$

Из уравнений (4.30) следуют соотношения, выражающие $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ через $\vec{H}(\vec{k}, \omega)$ и наоборот

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot [\vec{n}, \vec{H}], \quad \vec{H}(\vec{k}, \omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot [\vec{n}, \vec{E}], \quad (4.31)$$

где $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ – волновой импеданс среды, $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ – единичный вектор в направлении распространения волны, и $\omega = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ – закон дисперсии электромагнитной волны. Из соотношений (4.30) следует, что волны в диспергирующих средах остаются поперечными, но амплитуды $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ и $\vec{H}(\vec{k}, \omega)$ различны: $|\vec{H}(\vec{k}, \omega)| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot |\vec{E}(\vec{k}, \omega)|$. Амплитуда H в $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ раз больше E .

4.5 Соотношения между фазовой и групповой скоростью

Из закона дисперсии электромагнитной волны $\omega = \frac{ck}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ можно найти фазовую скорость $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$. Фазовая скорость (скорость распространения фазы) – характеристика монохроматической волны (бесконечной синусоиды). Любая реальная волна это группа (волновой пакет) таких идеальных волн. Передача реального сигнала осуществляется всегда с групповой скоростью. И скорость такой передачи не может превышать скорость света. Из рассмотрения распространения волнового пакета следует, что величина групповой скорости

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega}, \quad (4.32)$$

где $\omega = \frac{ck}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{ck}{n(\omega)}$, или $k = \frac{\omega \cdot n(\omega)}{c}$. Тогда (4.32) можно преобразовать к виду

$$v_{gp} = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{c}{n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}}. \quad (4.33)$$

Рассмотрим частные случаи

- а) $\frac{\partial n}{\partial \omega} = 0$, дисперсии нет. В этом случае $v_{gp} = v_\phi$,
- б) $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0$, система с нормальной дисперсией: $v_{gp} < v_\phi$,
- в) $\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0$, система с аномальной дисперсией: $v_{gp} > v_\phi$.

В любом случае выполняется неравенство: $v_{gp} < c$.

Рассмотрим далее влияние комплексной электрической проницаемости на затухание и фазовый сдвиг для плоской электромагнитной волны. Магнитную проницаемость, для простоты, будем считать действительной и равной единице. Напомним, что $k = \frac{\omega \cdot n(\omega)}{c}$, где $n(\omega) = \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\epsilon' + i\epsilon''}$ (для $\mu = 1$) имеет смысл комплексного показателя преломления. Выделим действительную и мнимую части $n(\omega) = n' + in''$. Возводя в квадрат, получим

$$\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) = n'^2 - n''^2 + 2i \cdot n'n'' \quad (4.34)$$

Решая систему биквадратных алгебраических уравнений относительно величин n' и n''

$$\varepsilon'(\omega) = n'^2 - n''^2, \quad \varepsilon''(\omega) = 2n'n'' \quad (4.35)$$

найдем

$$n' = \sqrt{\frac{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}, \quad n'' = \sqrt{\frac{-\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}. \quad (4.36)$$

Если мнимая часть $\varepsilon'' = 0$, то из (4.36) следует, что $n' = \sqrt{\varepsilon'}$, а $n'' = 0$ и волновой вектор \vec{k} действителен. Затухание не наблюдается.

Если же $\varepsilon'' \neq 0$, то наблюдается затухание, связанное с тем, что \vec{k} комплексный вектор. Действительно для плоской монохроматической волны $\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{k}\vec{r} - \omega t} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \cdot e^{-\vec{k}''\vec{r}}$, где модуль $k'' = \frac{\omega n''}{c}$.

Комплексное число $n(\omega) = n' + in''$ можно представить в экспоненциальной форме $n' + in'' = \sqrt{n'^2 + n''^2} e^{i\varphi}$, где $\varphi = \text{arctg} \frac{n''}{n'}$. Тогда из (4.31) при $\mu = 1$ получаем

$$\vec{H}(\vec{k}, \omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E} \right] = \sqrt{n'^2 + n''^2} e^{i\varphi} \cdot \left[\frac{\vec{k}}{k}, \vec{E} \right], \quad (4.37)$$

что приводит к фазовому сдвигу между полями \vec{E} и \vec{H} .

Для металлов

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \varepsilon' + i \frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

где σ – проводимость металла. И вплоть до оптических частот $\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \varepsilon'$.

В этом случае $n = \sqrt{i \frac{4\pi\sigma}{\omega}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}$ и фазовый сдвиг равен $\frac{\pi}{4}$. Величина $n'' = \text{Im}n$ в металле тоже велика, что обуславливает большое затухания волн в металле.

4.6 Переменное поле в металлах. Плазменные колебания

Рассмотрим электромагнитные поля в металле более подробно. Истинные металлы характеризуются очень высокой плотностью почти свободных носителей заряда электронов. Эта плотность имеет порядок $n \approx 10^{22} \div 10^{23}$ частиц на см^3 . Если в этом плотно упакованном газе электронов некоторый слой зарядов сместится на расстояние r , то сразу же возникнет огромная возвращающая сила, которая вернет заряды на место и далее из-за инерционности движения возникнут колебания. Оценим частоту таких колебаний.

При смещении зарядов нарушается электронейтральность и возникает двойной заряженный слой с поверхностной плотностью $\sigma = ner$. В этом «плоском конденсаторе» возникает электрическое поле напряженностью $E = 4\pi\sigma = 4\pi \cdot ner$. Тогда на заряд (электрон) начинает действовать возвращающая сила (в противоположном смещению направлении) величиной $-eE = -4\pi ne^2 r$. Тогда уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega_p^2 r = 0, \quad (4.38)$$

где $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}$ – плазменная частота. Соответствующие колебания называются плазменными, а квант колебаний – плазмоном. Характерные энергии плазмона $\hbar\omega_p = 1 \div 10$ эВ, в то время как для звуковых колебаний – фононов $\hbar\omega_\phi \approx 0,01$ эВ.

Плазменная частота нам уже встречалась при вычислении высокочастотной электрической проницаемости (4.19)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (4.39)$$

При $\omega < \omega_p$ электрическая проницаемость становится отрицательной, что приводит по (4.36) к большой величине n'' и, следовательно, к сильному затуханию электромагнитных волн в металле. В частотном диапазоне $\omega < \omega_p$ мы говорим об области непрозрачности. В этом случае волны проникают в металл лишь на малую глубину. Это так называемый скин-эффект.

При $\omega > \omega_p$ электрическая проницаемость действительна и положительна. В этом диапазоне частот (выше жесткого ультрафиолета) высокочастотные волны могут проходить в металле без затухания.

4.7 Скин-эффект

Рассмотрим более подробно низкочастотные $\omega < \omega_p$ электромагнитные волны в металле. В уравнениях Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.40)$$

будем считать $\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \approx |\omega \vec{D}| \ll |4\pi \sigma \vec{E}|$. Другими словами, ток проводимости много больше тока смещения. Это случай так называемых квазистационарных полей. На самом деле, для типичных металлов это частоты от нуля до оптического диапазона. Предположим также, что магнитные свойства металла в этом диапазоне частот остаются неизменными и характеризуются статической магнитной проницаемостью μ . Тогда уравнения (4.40) преобразуются к виду

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}. \quad (4.41)$$

Вычисляя $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H}$ с учетом, что $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, получим уравнение квазистационарных полей

$$\Delta \vec{H} - \frac{4\pi \sigma \mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad (4.42)$$

и аналогичное уравнение для электрического поля. По классификации уравнений в частных производных оно относится к параболическому типу и описывает решения, сходные с решениями уравнения теплопроводности.

Рассмотрим задачу о проникновении линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны в металл. Пусть металл занимает полупространство $z > 0$, направление изменения вектора \vec{E} в падающей волне направлено по оси X (Рис. 4.2), а $H_y = H(z)e^{-i\omega t}$.

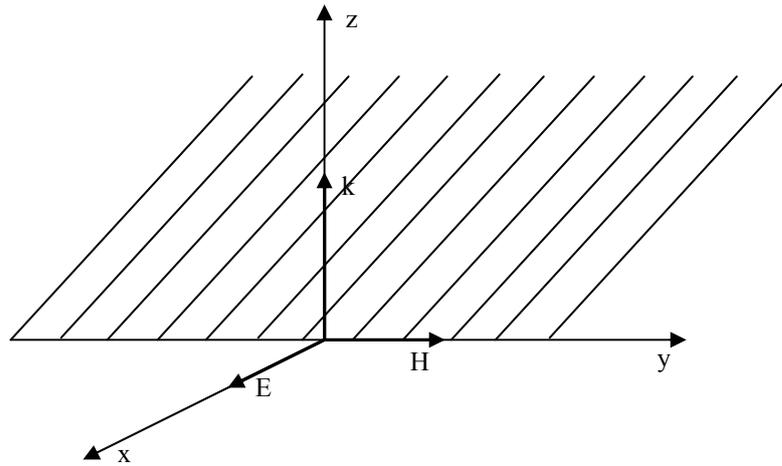


Рис. 4.2. Система координат для расчета скин-эффекта.

Запишем уравнение (4.42) для амплитуды магнитного поля $H(z)$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + i \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} H = 0. \quad (4.43)$$

Уравнение (4.43) имеет вид волнового уравнения

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} H = 0, \quad (4.44)$$

в котором формально

$$\varepsilon(\omega) = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (4.45)$$

Решение задачи о проникновении низкочастотного электромагнитного поля в металл, таким образом, можно получать из решения аналогичной задачи для диэлектрика с заменой величины электрической проницаемости по формуле (4.45).

Для уравнения (4.43) найдем убывающее с ростом z решение в виде $H(z) = H_0 e^{ikz}$ с комплексным волновым числом

$$k = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}} = \frac{1+i}{\delta}, \quad (4.46)$$

где

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad (4.47)$$

имеет размерность длины и называется глубиной скин-слоя. Для магнитного поля получаем решение

$$H_y(z, t) = H_0 e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)} \cdot e^{-\frac{z}{\delta}}. \quad (4.48)$$

Здесь $\frac{1}{\delta}$ играет двойную роль. Это и коэффициент затухания волны, это и действительная часть волнового числа. Экспоненциальное затухание поля при проникновении вглубь металла носит название скин-эффекта.

Численные оценки для меди при комнатной температуре дают следующие результаты:

- а) на промышленной частоте $\nu = 50$ Гц. – $\delta \approx 1$ см.,
- б) на частоте FM диапазона $\nu = 50$ МГц. – $\delta \approx 10^{-3}$ см.

В сверхпроводящих образцах $\sigma \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\delta \rightarrow 0$. Оказывается (из-за особенности сверхпроводящего состояния), что в сверхпроводник не проникает даже постоянное магнитное поле (эффект Мейснера).

В условиях сильного скин-эффекта величина поверхностного импеданса металла $|\zeta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ll 1$. В таких случаях можно строить приближенное решение задачи в виде ряда по степеням ζ .

4.8 Резонаторы и волноводы

Резонатор представляет замкнутый объем с проводящими стенками и является аналогом высокодобротного колебательного контура.

Рассмотрим распространение волн в пустом резонаторе в виде прямоугольного параллелепипеда с идеально проводящими стенками. За счет скин-эффекта электромагнитные волны не выходят за пределы резонатора и в нем образуются стоячие волны. Пусть имеются плоские волны вдоль оси x . Они удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0, \quad \frac{d^2 \vec{H}}{dx^2} + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \vec{H} = 0. \quad (4.49)$$

Пусть далее $\varepsilon = \mu = 1$ и $k = \frac{\omega}{c}$. На стенках резонатора выполняются граничные условия

$$E_\tau = 0, \quad H_n = 0. \quad (4.50)$$

Ищем решение уравнения (4.49) в виде монохроматической волны $E(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)e^{-i\omega t}$ с граничными условиями первого рода для тангенциальных и второго рода для нормальных компонент электрического поля. Это приводит нас к решению для компонент поля

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= E_1 \cdot \cos k_1 x \cdot \sin k_2 y \cdot \sin k_3 z \cdot e^{-i\omega t} \\ E_y(x, y, z, t) &= E_2 \cdot \sin k_1 x \cdot \cos k_2 y \cdot \sin k_3 z \cdot e^{-i\omega t} \\ E_z(x, y, z, t) &= E_3 \cdot \sin k_1 x \cdot \sin k_2 y \cdot \cos k_3 z \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (4.51)$$

где

$$k_1 = \frac{n_1 \pi}{L_1}, \quad k_2 = \frac{n_2 \pi}{L_2}, \quad k_3 = \frac{n_3 \pi}{L_3}, \quad (4.52)$$

а n_1, n_2, n_3 – целые числа. В этом случае на длине стороны параллелепипеда укладывается целое число длин полуволн (условие образования стоячих волн). Тогда набор собственных частот электромагнитных колебаний в прямоугольном резонаторе

$$\omega_{n_1, n_2, n_3} = c \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = c\pi \sqrt{\frac{n_1^2}{L_x^2} + \frac{n_2^2}{L_y^2} + \frac{n_3^2}{L_z^2}}. \quad (4.53)$$

В общем случае в резонаторе существует суперпозиция колебаний с различными n_1, n_2, n_3 – суперпозиция мод колебаний. Каждая мода характеризуется набором трех чисел n_1, n_2, n_3 , происходит своеобразное квантование. Спектр собственных частот неэквидистантный. Если предположить, что $L_x > L_y > L_z$, то низшей частотой будет обладать мода (1,0,0), и ее частота

$$\omega_{\min} = \frac{c\pi}{L_x}.$$

Если затухания нет, то резонансные линии близки к δ -образным, в противном случае они характеризуются определенной шириной, что можно

учесть задав собственные частоты в комплексном виде $\omega = \omega' + i\omega''$. Тогда отношение $Q = \frac{\omega'}{2\omega''}$ будет характеризовать добротность такого колебательного контура.

Перейдем к рассмотрению распространения электромагнитных волн в волноводах. Волновод это длинная труба прямоугольного или круглого сечения, предназначенная для передачи высокочастотного сигнала. Мы будем считать, что волновод пустой (иногда его заполняют диэлектриком) и, что стенки волновода идеально проводящие. Выберем ось z вдоль оси волновода и будем искать решение для \vec{E} и \vec{H} в виде бегущей монохроматической волны вдоль оси z

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) \cdot e^{i(kz - \omega t)}. \quad (4.54)$$

Оказывается, что в волноводе не существует решения в виде поперечных волн. Обязательно будет, по крайней мере, одна не равная нулю продольная компонента поля, либо E_z , либо H_z . Естественно ввести, согласно Рэлею, классификацию волн:

а) волна Е-типа: $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ (поперечная магнитная волна, ТМ-волна),

б) волна Н-типа: $H_z \neq 0$, $E_z = 0$ (поперечная электрическая волна, ТЕ-волна).

В поперечном направлении (по осям x и y) образуются стоячие волны, аналогично задаче о резонаторе. Тогда волновой вектор

$$k = \frac{\omega}{c} = \sqrt{\left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b}\right)^2 + k_z^2}, \quad (4.55)$$

где a и b поперечные размеры волновода. И закон дисперсии электромагнитной волны в волноводе

$$\omega = c \sqrt{\left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b}\right)^2 + k_z^2}. \quad (4.56)$$

Видно, что бегущие волны возможны только на частотах

$$\omega > \omega_c = c \sqrt{\left(\frac{n_1\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{b}\right)^2}. \quad (4.57)$$

На меньших частотах распространение бегущих волн невозможно, либо, можно сказать, что в этом случае $k_z^2 < 0$ и $k_z = ik'$, и волна быстро затухает (так бывает на входе в волновод).

Резонатор является заменителем колебательного контура на высоких частотах, где понятия сосредоточенной емкости и индуктивности теряют смысл. Волновод служит для передачи высокочастотного сигнала внутри такой трубы так, как передача по проводам не возможна из-за больших потерь на излучение высокочастотного сигнала.

В некотором смысле земной шар (радиуса $R \approx 6400$ км.), окруженный на высоте около $h \approx 30$ км. проводящим ионизированным слоем, является некоторым волноводом, а с учетом его замыкания вокруг Земли и резонатором. Можно выделить два набора собственных частот (в вертикальном и горизонтальном направлениях):

$$\text{а) } \omega_n^{(1)} = \frac{cn}{h} \approx n \cdot 10^3 \text{ Гц.},$$

$$\text{б) } \omega_n^{(2)} = \frac{cn}{2\pi R} \approx n \cdot 7,5 \text{ Гц.}$$

Первая гармоника в 7,5 Гц соответствует частоте геопланетарного резонанса.

4.9 Волны в анизотропных средах

В анизотропных средах (кристаллах или анизотропных аморфных средах) электрическая и магнитная проницаемости являются тензорными величинами. Пусть для простоты, анизотропией обладают только электрические свойства кристалла $D_i = \varepsilon_{i,j} E_j$, а $\mu = 1$ – среда немагнитная и непроводящая.

Переходя в уравнениях Максвелла

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.58)$$

к Фурье компонентам (4.29) получим

$$\begin{aligned} c[\vec{k}, \vec{E}] &= \omega \vec{H} \\ c[\vec{k}, \vec{H}] &= -\omega \vec{D} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Откуда следует, что \vec{H} перпендикулярно \vec{k} и \vec{E} , а \vec{D} перпендикулярно \vec{k} и \vec{H} . Тогда поток энергии электромагнитной волны $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$ перпендикулярен к \vec{E} и \vec{H} .

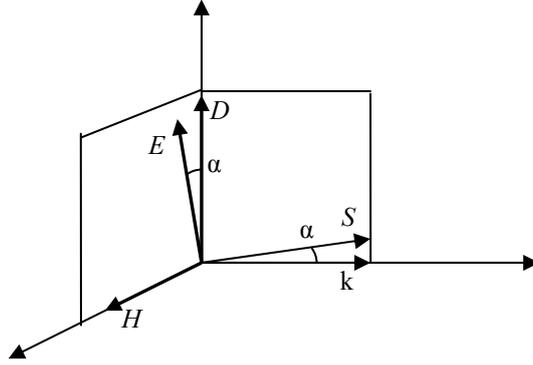


Рис. 4.3. Направление векторов индукции и поля в анизотропной среде.

Схематично направление векторов изображено на рис. 4.3. Отметим, что в этом случае фронт волны нормален к \vec{k} , а поток энергии направлен по \vec{S} . Выражая \vec{H} из первого уравнения (5.59) и подставляя во второе получим

$$\vec{D} = [\vec{H}, \vec{n}] = [[\vec{n}, \vec{E}], \vec{n}] = [\vec{n}, [\vec{E}, \vec{n}]] = \vec{E}\vec{n}^2 - \vec{n}(\vec{n}\vec{E}), \quad (4.60)$$

где $\vec{n} = \frac{c}{\omega} \vec{k}$ – безразмерный волновой вектор (в изотропной среде $n = \sqrt{\varepsilon}$).

При выводе (4.60) была использована формула для двойного векторного произведения.

Соотношение (4.60) можно записать в тензорных обозначениях $D_i = E_i n^2 - n_i \sum_j n_j E_j$. Подставляя сюда $D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j$ и $E_i = \delta_{ij} E_j$ а затем, вынося общий множитель E_j , получим

$$\sum_j (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} n^2 + n_i n_j) E_j = 0. \quad (4.61)$$

Для получения нетривиального решения системы уравнений (4.61) потребуем выполнения условия

$$\det(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} n^2 + n_i n_j) = 0. \quad (4.62)$$

Запишем это условие в явном виде в системе координат, в которой тензор ε_{ij} диагонален. Пусть в главных осях компоненты тензора

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Тогда имеем уравнение Френеля

$$n^2 \left[\varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 \right] - \left[n_x^2 \varepsilon_x (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + n_y^2 \varepsilon_y (\varepsilon_x + \varepsilon_z) + n_z^2 \varepsilon_z (\varepsilon_y + \varepsilon_x) \right] + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z = 0 \quad (4.64)$$

Это уравнение относительно трех неизвестных n_x , n_y , n_z может быть сведено к биквадратному уравнению относительно двух отношений. Рассмотрим частные случаи

а) кубическая симметрия: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$. Уравнение Френеля $\varepsilon n^4 - 2\varepsilon^2 n^2 + \varepsilon^3 = 0$ или $(n^2 - \varepsilon)^2 = 0$. Модуль волнового вектора равен показателю преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ и пространство волновых векторов – сфера. Среда изотропная.

б) одноосная симметрия: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel}$. Уравнение Френеля

$$n^2 \left[\varepsilon_{\perp} (n_x^2 + n_y^2) + \varepsilon_{\parallel} n_z^2 \right] - \left[\varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) (n_x^2 + n_y^2) + 2\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} n_z^2 \right] + \varepsilon_{\perp}^2 \varepsilon_{\parallel} = 0 \quad (4.65)$$

преобразуется к виду

$$(n^2 - \varepsilon_{\perp}) \left[\varepsilon_{\perp} (n_x^2 + n_y^2) + \varepsilon_{\parallel} n_z^2 - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \right] = 0. \quad (4.66)$$

Есть два типа решений.

1) $n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ – соответствует сферической волновой поверхности с показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ как для изотропного кристалла.

2) $\left[\varepsilon_{\perp} (n_x^2 + n_y^2) + \varepsilon_{\parallel} n_z^2 - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \right] = 0$ может быть приведено к виду $\frac{n_x^2 + n_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{n_z^2}{\varepsilon_{\perp}} = 1$. Пространство волновых векторов – эллипсоид вращения. В этом случае наблюдается двойное лучепреломление.

4.10 Флуктуации, флуктуационно-диссипационная теорема

Электрическая проницаемость (восприимчивость) является примером функции отклика системы на внешнее воздействие (поле).

Флуктуации это случайные отклонения наблюдаемой величины от равновесного (среднего) значения для системы, находящейся в термодинамическом контакте с термостатом. Флуктуации описываются средними значениями моментов флуктуирующих величин. Например, средними значениями двухвременных корреляционных функций в равновесном состоянии $\langle A(\tau)B(t-\tau) \rangle_0$.

Онзагером сформулирован постулат, что система, выведенная из равновесного состояния, возвращается к равновесию одинаково, как в случае если неравновесное состояние возникло под действием внешнего воздействия, так и случае если неравновесное состояние возникло в результате флуктуации. Конечно, если отклонение от равновесия достаточно мало. Флуктуационно-диссипационная теорема устанавливает связь между двумя на первый взгляд различными явлениями – средними значениями флуктуаций в системе в условиях термодинамического равновесия и коэффициентами восприимчивости системы по отношению к внешним воздействиям.

Эта теорема имеет много обликов, поэтому можно было бы использовать множественное число для ее названия. Первая теорема такого рода была получена Найквистом в 1928 г. в связи с теорией шумов в электрических цепях. Общая формулировка теоремы по отношению к статистической механике дана Кэлленом и Вельтоном в 1951 г.

Согласно этой теореме средний квадрат флуктуирующей величины (в нашем случае поляризации вещества) дается интегралом от мнимой части восприимчивости

$$\langle P^2 \rangle = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^{\infty} f''(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT} d\omega. \quad (4.67)$$

Если неравенство $kT \gg \hbar\omega$ выполняется при всех существенных частотах (частоты, для которых $f''(\omega)$ отлично от нуля), то в (4.67) можно перейти к классическому пределу

$$\langle P^2 \rangle = \frac{2kT}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f''(\omega)}{\omega} d\omega. \quad (4.68)$$

Флуктуационно-диссипационная теорема устанавливает связь между равновесной и неравновесной статистической механикой, обеспечивает нас формулами, позволяющими выражать микроскопические величины через наблюдаемые макроскопические.

4.11 Прохождение быстрых частиц через вещество. Излучение Вавилова-Черенкова

Быстрые заряженные частицы при прохождении через вещество ионизируют атомы и теряют энергию. Именно на этом основаны методы наблюдения частиц (камера Вильсона, ионизационная камера и т.д.). В газах эти столкновения носят отдельный, единичный характер. В конденсированных средах быстрая частица взаимодействует сразу с большим числом атомов и создает вокруг себя облако поляризации, которое движется вместе с частицей и постепенно рассеивается. Вещество можно рассматривать как сплошную среду только если размер поляризационного облака L много больше межатомного расстояния a . А это означает, что скорость частицы $v \gg a\omega_0 = v_{am}$, где ω_0 – максимальная частота перехода в атомах.

Нерелятивистский случай. Пусть $v_{am} \ll v \ll c$ (в металлах $v_{am} \approx 10^7 \div 10^8$ см./с.). Здесь достаточно рассмотреть лишь электрическое поле, которое мы найдем из скалярного потенциала φ , удовлетворяющего уравнению Пуассона

$$\hat{\varepsilon} \Delta \varphi(\vec{r}, t) = -4\pi e \delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad (4.69)$$

где $\hat{\varepsilon} \varphi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \varphi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ – есть интегральный оператор.

Разложим

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k, \quad (4.70)$$

тогда

$$\hat{\varepsilon} (\Delta \varphi)_{\vec{k}} = -k^2 \hat{\varepsilon} \varphi_{\vec{k}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\vec{r}} (-4\pi e) \delta(\vec{r} - \vec{v}t) = -\frac{e}{2\pi^2} e^{-i\vec{k}\vec{v}t}. \quad (4.71)$$

Решение уравнения (4.71) есть

$$\varphi_{\vec{k}}(t) = \frac{e}{2\pi^2 k^2 \varepsilon(k, \nu)} e^{-i\vec{k}\vec{v}t}. \quad (4.72)$$

Фурье-компонента поля $E_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} = -\vec{\nabla}(\varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}) = -i\vec{k}\varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$, отсюда $E_{\vec{k}} = -i\vec{k}\varphi_{\vec{k}}$ и подставляя (4.72) получим

$$\vec{E}_{\vec{k}}(t) = -\frac{i\vec{k}}{2\pi^2 k^2 \varepsilon(k, \nu)} e^{-i\vec{k}\vec{v}t}. \quad (4.73)$$

Созданное частицей поле, действует на нее с силой торможения

$$\vec{F} = e\vec{E}(\vec{r}, t)|_{\vec{r}=\vec{v}t} = e \int \vec{E}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\vec{v}t} d^3\vec{k} = -i \frac{e^2}{2\pi^2} \int \frac{\vec{k}}{k^2 \varepsilon(k, \nu)} d^3\vec{k}. \quad (4.74)$$

Пусть скорость $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$. Для вычисления (4.74) обозначим $\omega = k_x v_x$, поперечный импульс $q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ и перейдем к интегрированию в цилиндрической системе координат

$$F = -i \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{q_0} dq \frac{q\omega}{\varepsilon(\omega)(q^2 v^2 + \omega^2)}. \quad (4.75)$$

Здесь интеграл по q ограничен верхним пределом q_0 (обрезан). Введение величины q_0 связано с условием $L \gg a$ применимости макротории. Поле $\vec{E}_{\vec{k}}$ передает ионизационному электрону импульс $\hbar\vec{k}$, который при больших q приближенно равен $\hbar\vec{q}$. Такому импульсу соответствуют столкновения с прицельным параметром $\approx \frac{1}{q}$, который в силу принципа неопределенности не может быть меньше a . Поэтому, параметр q_0 заключен в пределах

$\frac{\omega_0}{v} \ll q_0 \ll \frac{1}{a}$ и определяет силу торможения. Введем обозначения

$\frac{1}{\varepsilon(\omega)} = \eta(\omega) = \eta'(\omega) + i\eta''(\omega)$, где $\eta'(\omega)$ – четная функция частоты ω , а $\eta''(\omega)$

нечетная функция. Тогда (4.71) приобретает вид

$$F = -i \frac{e^2}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \omega d\omega \int_0^{q_0} [\eta'(\omega) + i\eta''(\omega)] \frac{d(q^2)}{(q^2 v^2 + \omega^2)} \quad (4.76)$$

Здесь введен предельный переход $R \rightarrow \infty$ для исключения логарифмической расходимости в интеграле по ω . Это связано с тем, что из полного по-

ля надо было вычесть поле в пустоте, не имеющее отношение к торможению частицы в веществе. При симметричных пределах расходимость пропадает в силу четности $\eta'(\omega)$. Эту расходимость можно было также убрать заменой диэлектрической проницаемости $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Итак

$$F(q_0) = -\frac{2e^2}{\pi} \int_0^\infty \omega \eta''(\omega) \frac{1}{2v^2} \ln(q^2 v^2 + \omega^2) \Big|_0^{q_0} d\omega = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^\infty \omega |\eta''(\omega)| \ln \frac{q_0 v}{\omega} d\omega. \quad (4.77)$$

Определим среднюю частоту $\ln \bar{\omega} = \frac{m}{2\pi^2 e^2 N} \int_0^\infty \omega |\eta''(\omega)| \ln \omega d\omega$, тогда

$$\begin{aligned} F(q_0) &= \frac{2e^2}{v^2 \pi} \left[-\ln q_0 v \int_0^\infty \omega \eta''(\omega) d\omega - \int_0^\infty \omega |\eta''(\omega)| \ln \omega d\omega \right] = \\ &= \frac{2e^2}{v^2 \pi} \left[\frac{2\pi^2 e^2 N}{m} \ln q_0 v - \frac{2\pi^2 e^2 N}{m} \ln \bar{\omega} \right] = \frac{4\pi N e^4}{m v^2} \ln \frac{q_0 v}{\bar{\omega}}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Формула (4.78) определяет торможение быстрой частицы путем ионизации с передачей энергии малой по сравнению с энергией частицы. При таком условии формула справедлива в равной степени для торможения как тяжелых, так и легких быстрых частиц.

Релятивистский случай. Теперь для расчета электрического поля надо исходить из полной системы уравнений Максвелла с плотностью сторонних зарядов и токов

$$\rho_{cm} = e\delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad \vec{j}_{cm} = e\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{v}t). \quad (4.79)$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, получим

$$F(q_0) = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \omega d\omega \int_0^{q_0} \frac{\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} \right) q dq}{\varepsilon(\omega) \left[q^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} \right) \right]}. \quad (4.80)$$

При $c \rightarrow \infty$ выражение (4.80) переходит в (4.75). Здесь, обычно, разбирают два предельных случая.

Если среда является диэлектриком, а скорость частицы удовлетворяет условию $v^2 < \frac{c^2}{\epsilon_0}$, то выражение для силы торможения мало отличается от приведенного в (4.78)

$$F(q_0) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \left[\ln \frac{q_0 v \gamma}{\bar{\omega}} - \frac{v^2}{2c^2} \right]. \quad (4.81)$$

Во втором предельном случае, когда $v^2 > \frac{c^2}{\epsilon_0}$ (этот случай реализуется в металлах)

$$F(q_0) = \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} \ln \frac{mc^2 q_0^2}{4\pi Ne^2}. \quad (4.82)$$

Излучение Вавилова-Черенкова. Заряженная частица, движущаяся в прозрачной среде, в определенных условиях испускает своеобразное излучение, оно было впервые открыто Черенковым в 1937 г. Отметим, что это не тормозное излучение, которое испускается движущимся электроном при его столкновениях с атомами. В явлении Черенкова мы имеем дело с излучением среды под влиянием поля движущегося в ней заряда.

Введем следующие обозначения: волновое число волны $k = \frac{\omega}{c} n$, где $n = \sqrt{\epsilon}$ – вещественный показатель преломления, $\omega = k_x v$ (частица движется в направлении оси x). Поскольку $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} > k_x$, то $\frac{n\omega}{c} > \frac{\omega}{v}$ или $v > \frac{c}{n} = v_{фаз}$. Введем угол излучения от направления движения, тогда

$$k_x = k \cos \theta = \frac{n\omega}{c} \cos \theta = \frac{\omega}{v}. \quad \text{Отсюда направление излучения } \cos \theta = \frac{c}{nv} = \frac{v_{фаз}}{v}.$$

Излучение волн дополнительная, хоть и малая, часть полных потерь энергии. Из (4.80) потери энергии в интервале частот $d\omega$

$$dF = \frac{ie^2}{2\pi} \sum_{\omega} \omega \left(\frac{1}{v^2 \epsilon} - \frac{1}{c^2} \right) \int_{-\infty}^{q_0} \frac{q dq}{q^2 - \omega^2 \left(\frac{\epsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)} d\omega. \quad (4.83)$$

Введем новую переменную $\zeta = q^2 - \omega^2 \left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2} \right)$:

$$dF = d\omega \frac{ie^2}{\pi} \sum_{\omega} \omega \left(\frac{1}{v^2 \varepsilon} - \frac{1}{c^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (4.84)$$

Особую точку $\zeta = 0$, лежащую на пути интегрирования, следует обойти с учетом знака мнимой части $\varepsilon(\omega)$. Хотя мы и считали среду прозрачной и $\varepsilon(\omega)$ вещественной, но все таки она обладает некоторой малой мнимой частью положительной при $\omega > 0$, и отрицательной при $\omega < 0$. С учетом этого приходим к окончательной формуле

$$dF = \frac{e^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2} \right) \omega d\omega = \frac{e^2}{c^2} \sin^2 \theta \omega d\omega, \quad (4.85)$$

определяющей интенсивность излучения в частотном интервале $d\omega$. Примером черенковского излучения служит яркое голубое свечение воды, окружающей реактор в качестве защиты от быстрых частиц. Отметим, что тормозное излучение пропадает в пределе $m \rightarrow \infty$, а черенковское остается.

Качественно, черенковское излучение можно объяснить резонансным возбуждением волн быстро движущейся частицей.

Контрольные вопросы

1. Какое электромагнитное поле можно считать низкочастотным?
2. В чем состоит причина частотной дисперсии электрической и магнитной проницаемостей?
3. Как связаны между собой Фурье компоненты индукции и напряженности поля в среде с частотной дисперсией?
4. Какой четностью обладают действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости?
5. Каковы свойства диэлектрической проницаемости и восприимчивости в комплексной плоскости $\omega = \omega' + i\omega''$?
6. Какова связь между амплитудами \vec{E} и \vec{H} плоской волны в диспергирующей среде?
7. Как выражаются действительная и мнимая части комплексного показателя преломления диспергирующей среды через действительную и мнимую части диэлектрической проницаемости?
8. Что такое плазменные колебания в металле и какова их частота?
9. В чем состоит скин-эффект и какова глубина скин-слоя?

10. Какой вид имеют уравнения квазистационарных полей?
11. Каков спектр частот электромагнитных колебаний в прямоугольном резонаторе?
12. Являются ли электромагнитные волны в прямоугольном волноводе поперечными?
13. Совпадают ли направления распространения волны и вектора потока энергии в анизотропных средах?
14. Что такое флуктуации и в чем смысл флуктуационно-диссипационной теоремы?
15. В чем причина излучения Вавилова-Черенкова, и чем оно отличается от тормозного излучения?

Глава 5. Магнитные свойства конденсированных сред

В этой главе будут рассмотрены магнитные свойства как слабомагнитных диа- и парамагнетиков (не обладающих дальним магнитным порядком), так и сильномагнитных веществ, обладающих дальним магнитным порядком. Среди них наиболее известны ферромагнетики, антиферромагнетики и ферромагнетики. Сверхпроводники также обладают особыми магнитными свойствами, в них также есть дальний порядок, хотя и иной породы. Сверхпроводники и магнитоупорядоченные материалы объединяет еще то обстоятельство, что оба класса явлений не могут быть принципиально описаны в рамках классической физики и требуют квантового подхода.

5.1. Магнитная симметрия конденсированных сред

Несмотря на магнитостатическую аналогию (см. раздел 2.5), между электрическими и магнитными свойствами вещества имеется глубокое отличие. Первые создаются распределением зарядов, а вторые – распределением токов [2]. Заряды и токи ведут себя по-разному при инверсии времени: $\hat{T}\rho(t) = \rho(t)$, $\hat{T}\vec{j}(t) = -\vec{j}(t)$, где \hat{T} - оператор инверсии времени, для произвольной функции $f(t)$ $\hat{T}f(t) = f(-t)$.

Мы знаем, что уравнения динамики инвариантны относительно инверсии времени. Инверсия времени приводит термодинамически равновесное макроскопическое состояние также к равновесному состоянию. При этом возникает два варианта: новое состояние совпадает или не совпадает с исходным. Введем микроскопические плотности зарядов $\rho(\vec{r})$ и токов $\vec{j}(\vec{r})$, усредненные только по времени. Именно эти функции определяют электрическую и магнитную структуру вещества. Термодинамический потенциал Φ есть функционал от этих переменных, $\Phi = \Phi[\rho, \vec{j}]$. При инверсии времени

$$\hat{T}\Phi[\rho, \vec{j}] = \Phi[\rho, -\vec{j}]. \quad (5.1)$$

Если состояние не меняется при инверсии, то $\Phi[\rho, -\vec{j}] = \Phi[\rho, \vec{j}]$, то есть макроскопический эффект от микроскопических токов отсутствует. Про такие вещества мы говорим, что у них нет магнитной структуры, в них намагниченность M равна нулю в отсутствие внешнего магнитного поля.

Во втором случае, когда состояние меняется при инверсии времени,

$$\hat{T}\Phi[\rho, \vec{j}] = \Phi[\rho, -\vec{j}] \neq \Phi[\rho, \vec{j}]. \quad (5.2)$$

Это означает, что распределение токов приводит к макроскопическим эффектам. Такие вещества обладают магнитной структурой. Заметим, что электрической структурой обладают все конденсированные системы, поскольку $\rho(-t) = \rho(t) \neq 0$.

Число различных магнитных структур велико. Простейшие из них показаны на рис. 5.1.

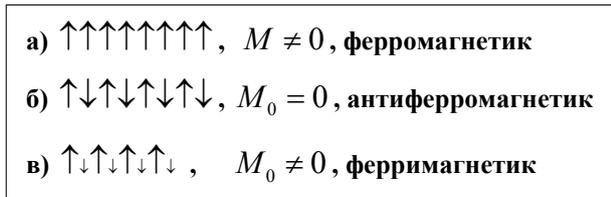


Рис. 5.1. Основные типы магнитных структур. Стрелки показывают микроскопические магнитные моменты.

Это ферромагнетик (а), антиферромагнетик (б) и ферримагнетик (в). У ферромагнетика в основном состоянии все магнитные моменты параллельны, намагниченность $\vec{M}_0 = N\vec{M}_{am}$, где \vec{M}_{am} - магнитный момент атома, N - число атомов в единице объема. У антиферромагнетика $M_0 = 0$ при наличии дальнего магнитного порядка. Согласно Нелю, магнитная структура антиферромагнетика состоит из двух (или более) эквивалентных магнитных подрешеток A и B , так что $\vec{M}_A = -\vec{M}_B$. В случае ферримагнетика также имеются две подрешетки, но они не эквивалентны и $\vec{M}_0 = \vec{M}_A + \vec{M}_B \neq 0$.

Типичными примерами ферромагнетиков служат Fe , Ni , Co антиферромагнетиков – MnO , NiO , La_2CuO_4 , $LaMnO_3$, ферримагнетиков – Fe_3O_4 .

5.2. Диамагнетизм и парамагнетизм

Из определения $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$ и материальных соотношений $\vec{B} = \mu\vec{H}$ и $\vec{M} = \chi\vec{H}$ следует, что магнитная восприимчивость χ и проницаемость μ связаны соотношением

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi}. \quad (5.3)$$

Для парамагнетиков $\chi > 0$, $\mu > 1$, для диамагнетиков $\chi < 0$, $\mu < 1$. Обычно величина χ для диа- и парамагнетиков невелика, $|\chi| \sim 10^{-4}$. Эта малость отражает релятивистскую природу магнетизма в слабомагнитных материалах и обусловлена множителем $(v/c)^2$, где v - характерная скорость электронов. Типичным примером парамагнетика служит Al , а диамагнетика – Bi .

Физическая природа диамагнетизма заключается в следующем: с точки зрения классической физики электрон, вращающийся вокруг ядра, есть ток. Если включить магнитное поле \vec{H} , то внутри атома индуцируются дополнительные токи, которые по правилу Ленца образуют магнитный момент, направленный против поля, то есть $\chi < 0$ и вещество отталкивается от магнита.

Если сравнивать намагничивание вещества во внешнем магнитном поле с поляризацией диэлектриков во внешнем электрическом поле, то диамагнетизм аналогичен наведенной (электронной) поляризации. Он присутствует во всех конденсированных средах независимо от наличия или отсутствия магнитной структуры. Внутренние токи в многоэлектронном атоме могут так скомпенсироваться, что в отсутствие внешнего поля момент атома равен нулю – в этом случае и возникает диамагнетизм. Если же магнитные моменты атомов отличны от нуля, то они в магнитном поле встраиваются вдоль поля аналогично ориентационной поляризуемости диполей в электрическом поле.

Энергия магнитного диполя \vec{m} в поле \vec{B} равна $w = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta$. При нулевой температуре минимум энергии U достигается, когда все моменты параллельны полю. При конечных температурах минимизируется свободная энергия $F = U - TS$. Хаотичное распределение моментов дает максимум энергии S , так что при $T \rightarrow \infty$ электронный фактор побеждает. При промежуточных температурах упорядочение и хаос конкурируют, равновесное значение намагниченности (в полной аналогии с ориентационной поляризуемостью электрических диполей, см. раздел 2.2) может быть записано в виде

$$M = N \int m \cos \theta N(\theta) / \int N(\theta) d\theta, \quad (5.4)$$

где $N(\theta)$ есть функция углового распределения моментов. При конечных температурах $N(\theta) \sim \exp(-W/kT)$, больцмановский фактор приводит к разным вероятностям найти момент по полю и против поля. Вычисление интегралов (5.4) приводит к функции Ланжевена

$$M = NmL(m\mu H/kT), \quad L(x) = \coth x - 1/x. \quad (5.5)$$

При высоких температурах и малых полях, когда $m\mu H \ll kT$, $L(x) = x/3$. В результате находим

$$M = \frac{Nm^2\mu}{3kT} H, \quad \chi_{\text{Кюри}} = N \frac{m^2\mu}{3kT} = \frac{C}{T}. \quad (5.6)$$

Зависимость $\chi = C/T$ называется законом Кюри, а величина C – постоянной Кюри. Экспериментально этим законом пользуются для определения величины магнитного момента по тангенсу угла наклона прямой $\chi^{-1} \sim T$.

Заметим, что при рассмотрении ориентационной восприимчивости (5.6) мы рассматриваем энергию момента в поле. При этом других вкладов в энергию, в частности кинетическую, мы не учитываем. Это значит, что выражение (5.6) справедливо для веществ, где магнитные моменты покоятся и не взаимодействуют друг с другом. Поэтому закон Кюри неприменим к металлам, где носителями магнитных моментов являются электроны проводимости. Эти моменты имеют спиновую природу, расчет восприимчивости необходимо делать в рамках квантовой теории электронного газа в металлах. Оказывается, что в этом случае $\chi = \chi_{\text{Паули}}$ есть постоянная, не зависящая от температуры. В общем случае, если в веществе есть локализованные магнитные моменты атомов и подвижные моменты электронов, суммарная восприимчивость

$$\chi = \chi_{\text{Диа}} + \chi_{\text{Кюри}} + \chi_{\text{Паули}}. \quad (5.2.5) \quad (5.7)$$

Магнитный момент атома представляет собой векторную сумму орбитальных и спиновых моментов. Орбитальный момент в классической физике равен $\vec{m}_{\text{орб.}} = \gamma \vec{L}$, где $\gamma = e/2m_e c$ – гидромагнитные отношения, а \vec{L} – момент количества движения. В квантовой теории момент квантуется, $|\vec{L}| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$, где $\hbar = h/2\pi$ – постоянная планка, l – орбитальное квантовое число. Проекция $L_z = m_l \hbar$, $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$.

При изучении законов сохранения (том 1) мы видели, что следствием инвариантности относительно вращений в четырехмерном пространстве Минковского является сохранение полного момента количества движения, определяемого орбитальным моментом \vec{L} и собственным (спиновым) моментом \vec{S} . Из квантовой механики следует, что гиромагнитное отношение для спинового магнитного момента в 2 раза больше, чем для орбитального, $\vec{m}_{\text{спин.}} = \frac{e}{mc} \vec{S}$. Квантование спина ($S_z = \pm 1/2$) электрона в квантовой механике приводит к тому, что

$$\vec{m}_{\text{спин.}} = \frac{e\hbar}{2mc} \equiv m_B, \quad m_{\text{орб.}} = m_B \cdot m_l. \quad (5.8)$$

Здесь m_B есть магнетон Бора. При формировании многоэлектронного атома магнитные моменты электронов определяются правилом Хунда, согласно которому минимальную энергию имеет электронная оболочка с максимальным спином.

Итак, в рамках классической электродинамики мы можем определить понятие магнитной восприимчивости и ввести соотношение (5.3). Однако для понимания физической природы магнитных моментов вещества и механизмов поляризации необходимо использовать понятия квантовой теории. Невозможность описания магнитных свойств вещества в рамках классической физики доказана строго (теорема Ван Леевен).

5.3. Ферромагнетизм

Во многих парамагнетиках с понижением температуры появляется магнитоупорядоченное состояние с намагниченностью $\vec{M}_0 \neq 0$ в отсутствие внешнего магнитного поля. Такое состояние называется ферромагнитным, точка фазового перехода парамагнетик (ПМ)-ферромагнетик (ФМ) называется температурой Кюри T_C . Наличие спонтанной намагниченности и ее исчезновение выше T_C путем фазового перехода приводит к аналогии между ФМ и сегнетоэлектриком. Однако физические причины возникновения электрической и магнитной спонтанной поляризации различаются. В сегнетоэлектрике – это существенно анизотропное взаимодействие атомов молекул в кристаллической решетке, выделяющее ось поляризации и нарушающая симметрию относительно центра инверсии $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$. В ФМ – это в основном изотропное обменное взаимодействие, не зависящее от направления намагниченности, нарушается симметрия относительно инверсии времени $t \rightarrow -t$. Природа обменного взаимодействия чисто квантовая, и определяется тем, что кулоновское электростатическое взаимодействие двух электронов зависит от взаимной ориентации их спинов. Так, решение уравнения Шредингера для молекулы водорода или атома гелия, то есть для двух электронов, показывает, что для параллельных спинов ($S=1$) и для антипараллельных спинов ($S=0$) энергии отличаются, $E_{\uparrow\uparrow} < E_{\uparrow\downarrow}$. Обменная энергия определяется как разность $\Delta E_{обм} = E_{\uparrow\downarrow} - E_{\uparrow\uparrow}$. Кроме обменной энергии электростатической природы существует и магнитостатическое диполь-дипольное взаимодействие. Обычно вклад анизотропных магнитных взаимодействий мал по сравнению с обменным по параметру $v^2/c^2 \sim 10^{-4}$.

Итак, природа ферромагнетизма квантовая. Но для описания свойств ФМ диэлектриков во многих случаях можно воспользоваться феноменологической теорией, основанной на классической электродинамике. Эта теория предполагает, что при низких температурах $T \ll T_C$ локальные магнитные моменты могут только вращаться, сохраняя модуль $|\vec{M}_i|$. Плотность энергии (гамильтониан) ФМ должна быть инвариантна относительно всех операций симметрии решетки кристалла плюс инверсии времени. Так как $\hat{T}\vec{M}_i = -\vec{M}_i$, то гамильтониан H может содержать только четные степени \vec{M}_i . В общем случае H может быть представлен в виде

$$H = H_{из.} + H_{аниз.} - \sum_i \vec{M}_i (\vec{H} + \vec{H}_i). \quad (5.9)$$

Здесь $H_{из.}$ есть изотропный (обменный вклад) в энергию, для ФМ

$$H_{из.} = A\vec{M}_i^2 + B(\nabla\vec{M}_i)^2, \quad (5.10)$$

обменная энергия формирует величину намагниченности, но не ее направление. $H_{аниз.}$ есть плотность энергии магнитной анизотропии, зависящая от типа решетки, и обусловлена релятивистскими взаимодействиями (спин-спиновым и спин-орбитальным). В простейшем случае

$$H_{аниз.} = \frac{1}{2}\beta_{ik}M_iM_k, \quad (5.11)$$

где $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ - симметричный тензор 2^{го} ранга. В кубическом кристалле $\beta_{ik} = \beta\delta_{ik}$, в одноосном и двухосном тензоре β_{ik} имеет 2 и 3 независимых переменных, соответственно.

$$\begin{pmatrix} \beta_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\parallel} \end{pmatrix} - \text{одноосный} \qquad \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} - \text{двухосный}$$

Поскольку существует дополнительная квадратичная комбинация $M_{ix}^2 + M_{iy}^2 + M_{iz}^2 = M_i^2$, не зависящая от направления \vec{M}_i , число параметров анизотропии уменьшается на 1. так, для одноосного кристалла

$$H_{аниз.} = \frac{1}{2}\beta_{\perp}(M_{ix}^2 + M_{iy}^2) + \frac{1}{2}\beta_{\parallel}M_{iz}^2 = \frac{1}{2}(\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})(M_{ix}^2 + M_{iy}^2) + \frac{1}{2}\beta_{\parallel}M^2. \quad (5.12)$$

Последнее слагаемое в (5.12) изотропно и является пренебрежимо малой поправкой к изотропной энергии (5.10). В результате, для одноосного кристалла

$$H_{аниз.} = \frac{1}{2}\beta(M_{ix}^2 + M_{iy}^2) = \frac{1}{2}\beta M_i^2 \sin^2 \theta_i. \quad (5.13)$$

При $\beta > 0$ энергия минимальна при $\theta = 0$, где θ есть угол между M и осью z . Это значит, что намагниченность направлена вдоль оси z , называемой

осью легкого намагничивания. При $\beta < 0$ выгоднее $\sin \theta = \pm 1$, $\theta = \pm \pi/2$ - моменты лежат в плоскости xu (плоскость легкого намагничивания).

Для кубических кристаллов магнитная анизотропия возникает в более высоком порядке по M_i :

$$H_{\text{аниз.}} = -\frac{1}{2}\beta(M_{ix}^4 + M_{iy}^4 + M_{iz}^4). \quad (5.14)$$

Последнее слагаемое в (5.9) определяется зеемановской энергией магнитного момента во внешнем поле \vec{H} и в «размагничивающем» поле магнитостатического потенциала,

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left\{ \int_v \frac{-\text{div} \vec{M}_i(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \oint_{\Sigma} \frac{\vec{M}_i(\vec{r}') \cdot d\vec{f}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\}. \quad (5.15)$$

Здесь первый член описывает объемные, а второй – поверхностные вклады в потенциал.

Уравнение для намагниченности \vec{M} определяется уравнением Ландау-Лифшица

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H}_{\text{эфф}}, \quad (5.16)$$

где γ - гиромагнитное отношение, а эффективное поле равно

$$\vec{H}_{\text{эфф}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{M}} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial r_j} \right)}. \quad (5.17)$$

Два простейших решения уравнения Ландау-Лифшица следующие:

- 1) $\dot{\vec{M}} = 0$, $\vec{M} = \vec{M}_0$ - это основное состояние.
- 2) малые колебания в виде спиновых волн: $\vec{M}(\vec{r}, t) = \vec{M}_0 + \Delta \vec{M}(\vec{r}, t)$, $\Delta M \ll M_0$. Решение в виде $\Delta M \sim \exp i((\vec{k}\vec{r} - \omega t))$ дает энергию спиновых волн (в квантовой теории – магнонов), при $k \rightarrow 0$ энергия имеет вид

$$\omega_{sw}(k) = \omega(0) + Dk^2. \quad (5.18)$$

здесь щель в спектре $\omega(0)$ определяется анизотропией, в изотропном ФМ $\omega(0)=0$. Параметр D называется спин-волновой жесткостью и определяется обменным параметром B в (5.10).

Итак, в основном состоянии ФМ все локальные моменты выстроены параллельно благодаря обменному взаимодействию. Однако это утверждение справедливо для бесконечно-большого образца, заполняющего все пространство. Для реального образца конечного размера полный магнитный момент ФМ в отсутствие внешнего поля обычно равен нулю. Рассмотрим однородно намагниченный образец прямоугольной формы (рис. 5.2).

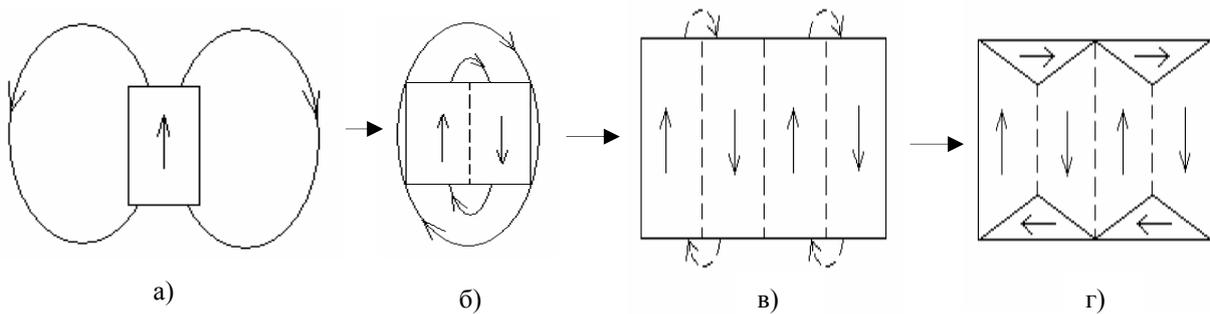


Рис. 5.2. Формирование доменной структуры ферромагнетика

Из-за непрерывности силовых линий и индукции \vec{B} для однородно намагниченного образца возникает большой проигрыш в энергии внешнего поля

$$\int_V \frac{H^2}{8\pi} dV$$

по объему пространства, окружающего образец. Этот проигрыш уменьшается, если разбить образец на 2 домена (рис. 5.2.б), однако при этом возникает проигрыш в энергии доменной стенки, разделяющей домены. Баланс энергий приводит к дальнейшему разбиению образца на домены (в). Образование поверхностных доменов (г) фактически замыкает магнитный поток внутри образца, устраняя тем самым проигрыш в энергии магнитного поля снаружи. Это очень упрощенная картина демонстрирует лишь физическую идею происхождения доменов. На самом деле активную роль в формировании доменной структуры играет также магнитная анизотропия.

Отметим также зависимость доменной структуры от размера L и формы образца. В частности, проигрыш энергии за счет образования доменной стенки пропорционален площади стенки L^2 , выигрыш за счет уменьшения энергии размагничивающего поля пропорционален объему L^3 . При уменьшении

размера L , в частности при переходе ко всем маленьким частицам, возрастает роль поверхностных эффектов по сравнению с объемными. Это значит, что для наночастиц невыгодно образовывать доменные стенки, им выгоднее находиться в однодоменном состоянии. Представление о доменах объясняет кривую намагничивания и перемагничивания ФМ во внешнем поле \vec{H} (петлю гистерезиса) (рис. 5.3). Пусть в начальном состоянии при $H=0$ образец размагничен из-за доменной структуры. Во внешнем поле H происходит рост обмена энергетически выгодных доменов (направленных вдоль поля) за счет объема невыгодных доменов, а также разворот намагниченности вдоль поля.

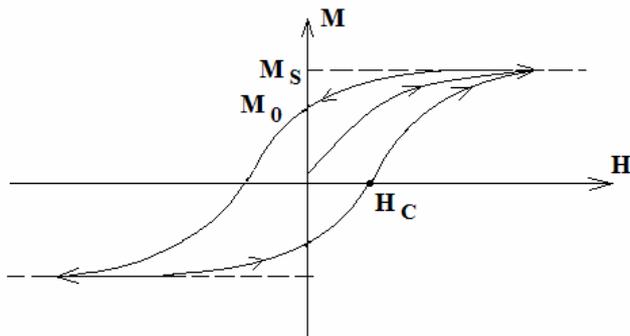


Рис. 5.3. Петля гистерезиса ферромагнетика. M_s - намагниченность насыщения, M_0 - остаточная намагниченность, H_c - коэрцитивная сила.

В конце концов, все домены выстроятся вдоль поля, возникает насыщенное состояние с намагниченностью M_s . Дальнейший рост поля не меняет намагниченности. Если из насыщенного состояния уменьшать поле H до нуля, получаем ФМ с остаточной намагниченностью M_0 . Для того, чтобы ее преодолеть и размагнитить образец до $M=0$, требуется приложить поле H в противоположном направлении до величины коэрцитивной силы H_c .

С ростом температуры намагниченность уменьшается, обращаясь в нуль непрерывно для фазового перехода 2^{го} рода. Для такого перехода Ландау предложил феноменологическую теорию, основанную на разложении свободной энергии вблизи перехода по степеням параметра порядка

$$F(M, T) = F_0(T) + \frac{1}{2} aM^2 + \frac{1}{4} bM^4 - MH + \frac{H^2}{8\pi}. \quad (5.19)$$

Здесь $F_0(T)$ - независящая от намагниченности часть свободной энергии, $a(T) = \alpha(T - T_c)$, $\alpha > 0$, $b > 0$. Последние 2 слагаемых в (5.19) соответствуют зеемановской энергии во внешнем поле и энергию поля. Намагниченность (параметр дальнего порядка) определяется из условия минимума свободной энергии $\partial F / \partial M = 0$ или

$$\alpha(T - T_c)M + bM^3 = H. \quad (5.20)$$

При $H=0$ имеем 2 решения уравнения (5.20): 1) $M=0$ (ПМ состояние при всех T); 2) ФМ состояние при $T < T_c$ с намагниченностью

$$M = \left[\frac{\alpha}{b} (T - T_C) \right]^{1/2}. \quad (5.21)$$

Сравнение энергий ПМ и ФМ состояний ниже T_C показывает, что

$$F_{\Phi M} - F_M = -\frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{b} (T_C - T)^2 < 0,$$

иначе говоря, при $T < T_C$ энергетически выгоднее ФМ состояние. При $T > T_C$ остается одно возможное ПМ состояние. Параметр порядка обращается в нуль при $T \rightarrow T_C$ степенным образом $M \sim (T_C - T)^\beta$ с критическим индексом $\beta = 1/2$, типичным для приближения среднего поля.

Во внешнем магнитном поле уравнение ((5.20) позволяет найти начальную магнитную восприимчивость $\chi = \partial M / \partial H \big|_{H \rightarrow 0}$. Дифференцируя (5.21) по H , получаем

$$\frac{\partial M}{\partial H} \left[\alpha(T - T_C) + 3bM^2(H) \right] = 1.$$

Выше T_C $M(H) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow 0$, так что

$$\chi(T) = \frac{1}{\alpha(T - T_C)}. \quad (5.22)$$

Зависимость (5.22) называется законом Кюри-Вейсса, который похож на закон Кюри для ПМ. Действительно, формально у ПМ $T_C = 0$ и закон Кюри-Вейсса переходит в закон Кюри для восприимчивости ПМ. При $T \rightarrow T_C$ восприимчивость ФМ стремится к бесконечности, что указывает на неустойчивость ПМ состояния. Действительно, достаточно приложить бесконечно малое внешнее поле, чтобы получить спонтанную намагниченность.

5.4. Основные свойства сверхпроводников

Сверхпроводимость есть особое состояние вещества, которое существует при низких температурах, $T < T_C$. Величина T_C называется критической температурой. Состояние ниже T_C (сверхпроводящее) принято обозначать буквой S , выше T_C (нормальное) – буквой N . Самые известные свойства сверхпроводников следующие [2]:

1) Нулевое сопротивление было обнаружено Камерлинг-Оннесом при измерении температурной зависимости удельного сопротивления $\rho(T)$ ртути в 1911 г.

2) выталкивание магнитного поля из объема (эффект Мейсснера) (рис. 5.4).

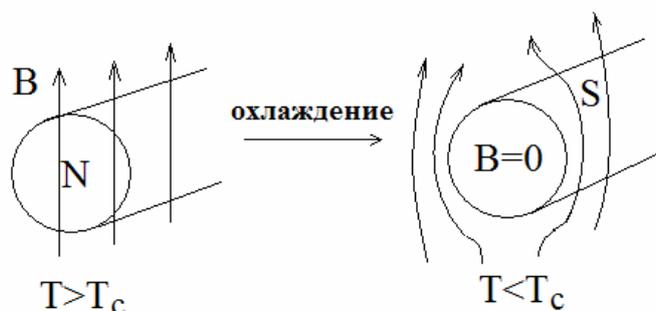


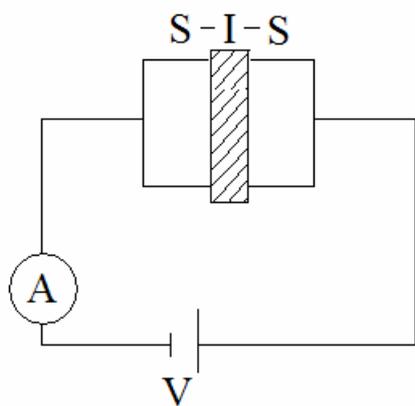
Рис. 5.4. Магнитные силовые линии пронизывают цилиндр в N -состоянии, но выталкиваются из него в S -состоянии.

Ниже T_c в объеме образца поле $B=0$. Это значит, что

$$H + 4\pi\chi H = 0 \rightarrow \chi = -1/4\pi \quad (5.23)$$

Иначе говоря, S является диамагнетиком. Но, в противоположность обычным диамагнетикам с $|\chi| \sim 10^{-5}$ в сверхпроводнике $|\chi| \sim 10^{-1}$. Поэтому иногда сверхпроводник называют еще сверхдиамагнетиком.

3) эффект Джозефсона. Рассмотрим конденсатор со сверхпроводящими контактами и тонкой диэлектрической прослойкой, так называемую $S-I-S$ структуру. Джозефсон предсказал два эффекта:



а) если замкнуть $S-I-S$ структуру контактами, то в цепи будет наблюдаться постоянный ток в отсутствие внешнего источника $V=0$;

б) при постоянной разности потенциалов $V=\text{const}$ в цепи возникает переменный ток $I(t) = I_0 \sin \omega t$ с частотой $\hbar\omega = 2 eV$.

Рис. 5.5. Схема исследования эффектов Джозефсона.

Оба эффекта подтверждены экспериментом и в настоящее время широко используются в попытках создания устройств сверхпроводящей электроники.

Удивительные свойства сверхпроводников долгое время были загадкой и не получили объяснения в рамках классической физики. И только в 1957 г. была создана квантовая теория Бардина-Купера-Шриффера (БКШ), объяснившая сверхпроводимость. Предсказания Джозефсона были сделаны на основе теории БКШ и явно демонстрируют квантовую природу сверхпроводимости. Джозефсоновские токи есть туннельные токи через $S-I-S$ структуру, а из выражения для частоты нестационарного тока видно, что туннелируют частицы с зарядом $q = 2e$.

Подробное изложение теории БКШ выходит за рамки курса классической электродинамики. Однако основные физические идеи, объясняющие сверхпроводимость, пояснить можно на качественном уровне. Электроны в конденсированных веществах взаимодействуют друг с другом как прямым образом по закону Кулона, так и косвенным, испуская и поглощая виртуальные фононы-кванты упругих колебаний решетки. Если кулоновское взаимодействие V_c всегда отталкивательное ($V_c > 0$), то взаимодействие, индуцированное обменом фононом, может иметь характер притяжения с потенциалом $V_{e-p-e} < 0$. Для нормальных металлов побеждает отталкивание. Если же суммарное взаимодействие имеет характер притяжения, то два электрона в металле образуют куперовскую пару с зарядом $q = 2e$. Для разрушения пары необходимо приложить энергию 2Δ . Для электронов со спином $S = 1/2$ квантовая статистика Ферми-Дирака определяется принципом Паули, запрещающим нахождение двух фермионов в одном состоянии. куперовская пара имеет $S = 0$ (два электрона имеют противоположные спины) и подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Сверхпроводимость есть Бозе-конденсат куперовских пар, то есть фаза с макроскопически большим числом куперовских пар в одном квантовом состоянии.

С ростом температуры энергия связи пары уменьшается, и при $T \rightarrow T_c$ $\Delta(T) \rightarrow 0$. Типичные значения T_c для простых металлов (Nb , V , Pb) меньше 10 К, так что для реализации S состояния необходимо охлаждение жидким гелием с температурой кипения 4,15 К. Также S состояние разрушается с ростом электрического тока при $j > j_c$ (j_c - плотность критического тока) и с ростом внешнего магнитного поля при $H > H_c$ (H_c - критическое магнитное поле).

Известны 2 типа сверхпроводников, различающихся механизмом разрушения сверхпроводимости во внешнем магнитном поле. Для S 1^{го} рода переход $S-N$ с ростом поля переходит во всем объеме (рис. 5.6 а). Ниже H_c - $M = H/4\pi$ и $B=0$, выше H_c $B = \mu H$. Для сверхпроводников 2^{го} рода существует промежуточная фаза (Шубников), в которой S разрушается частично. Как показал Абрикосов, магнитное поле проникает в объем S в виде вихрей, в центральной части которой имеется цилиндрическое ядро N -фазы, вокруг которого в объеме S -фазы циркулируют незатухающие токи, создающее это по-

ле. В то же время ниже H_{c1} магнитные свойства сверхпроводника 1^{го} рода и 2^{го} рода совпадают.

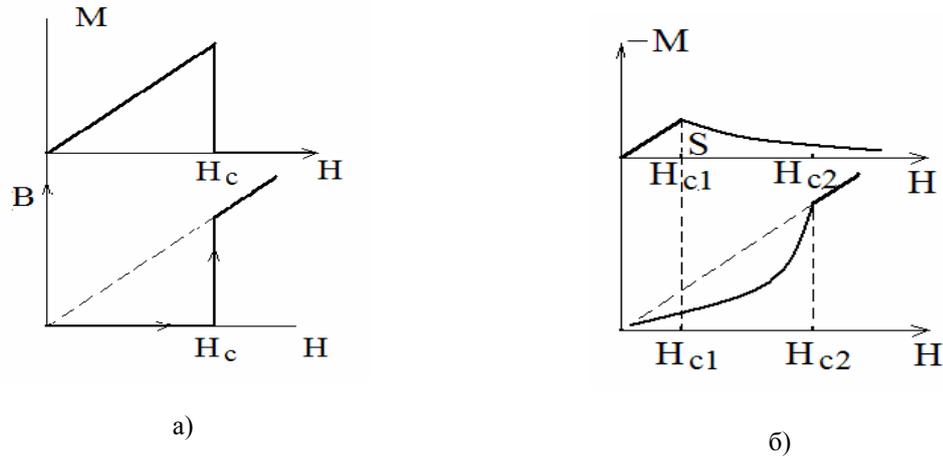


Рис. 5.6. Разрушение сверхпроводимости для сверхпроводников 1^{го} рода (а) и 2^{го} рода (б).

Рассмотрим подробнее распределение магнитного поля в случае слабого поля. Из минимизации функционала свободной энергии

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \int n_s m v^2 dV + \int \frac{H^2}{8\pi} dV, \quad (5.24)$$

содержащего кинетическую энергию сверхпроводящих электронов с концентрацией n_s и энергию магнитного поля \vec{H} , обусловленного сверхпроводящим током

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s, \quad \vec{j}_s = n_s e \vec{v}, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad (5.25)$$

получается уравнение Ф. и Г. Лондонов для магнитного поля

$$\vec{H} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \vec{H} = 0. \quad (5.26)$$

Здесь $\lambda_L = (mc^2/4\pi n_s e^2)^{1/2}$ есть постоянная с размерностью длины. Характерное значение λ_L для металлических сверхпроводников $\sim 50 \div 200$ нм.

Рассмотрим совместное решение уравнений Максвелла (5.4.3) и уравнений Лондонов (5.4.4) для полубесконечного сверхпроводника, занимающего область пространства $z > 0$, его поверхность образована плоскостью xy .

Плотность тока и поле H зависят только от z . Возможно 2 случая: 1) $\vec{H} \parallel z$, 2) \vec{H} лежит в плоскости xu .

В первом случае $\text{div } \vec{H} = \partial H_z / \partial z = 0 \rightarrow H_z = \text{const}$. Тогда из уравнения Лондонов следует $H_z = 0$. Таким образом, поле не может быть перпендикулярным к поверхности образца.

Во втором случае поле тангенциально. Направим ось x вдоль поля, так что

$$\vec{H} = (H_x(z), 0, 0),$$

а уравнение Лондонов принимает вид

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{H_x}{\lambda_L^2}. \quad (5.27)$$

Ищем решение уравнения (5.27) в виде

$$H_x = Ae^{z/\lambda_L} + Be^{-z/\lambda_L},$$

при $z \rightarrow \infty$ первое слагаемое экспоненциально растет, второе затухает, поэтому из граничных условий требуем $A=0$. Величину B найдем из граничного условия при $z=0$: $H(z=0) = H_0$. Таким образом, магнитное поле

$$H_x = H_0 e^{-z/\lambda_L} \quad (5.28)$$

экспоненциально затухает вглубь образца, равно нулю в объеме и заметно отлчно от нуля в области λ_L . Величина λ_L называется глубиной проникновения. Сверхпроводящий ток течет также в поверхностном слое глубиной λ_L

$$j_y = -\frac{c}{4\pi\lambda_L} H_0 e^{-z/\lambda_L}. \quad (5.29)$$

Формулы (5.28) и (5.29) описывает эффект Мейсснера. Что касается происхождения сверхпроводящего тока, оно уравнениями Лондонов не описывается. Они просто постулировали существование тока. И только последующая теория БКШ смогла объяснить сверхпроводящий ток как поток куперовских пар. Наличие энергии связи пары 2Δ приводит к нулевому сопротивлению при малых токах, поскольку невозможно одновременно удовлетворить законам сохранения энергии и импульса в процессе рассеяния электрона на дефектах и на других электронах.

5.5. Высокотемпературная сверхпроводимость

В первой половине 20^{го} века были исследованы в основном элементарные металлы, многие из которых становятся сверхпроводниками. Однако T_C у них невелика, наибольшая у Nb . У всех элементарных металлов $T_C < 10$ К. Затем были исследованы различные сплавы, из которых наиболее практически значимым оказался Nb_3Ge с $T_C = 23$ К.

В 1960-х годах появилась идея высокотемпературной сверхпроводимости, целью которой было создание сверхпроводников, не требующих охлаждения и работающих при комнатной температуре. Иначе говоря, T_C должно быть не менее 300 К. Эти идеи были во многом основаны на работах Литтла и В.Л. Гинзбурга, предложивших отличные от фононного механизмы притяжения в квазиодномерных (Литтл) и квазидвумерных (Гинзбург) структурах. Долгое время на практике ничего существенного с точки зрения повышения T_C не получалось. Так, подборкой компонент в сплаве на основе Nb_3Ge за 20 лет удалось повысить T_C до 23,2 К. Резкий прорыв произошел в 1986 г, когда Беднорц и Мюллер синтезировали сверхпроводящие составы в диэлектрических керамиках. Они показали, что в системе $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ появляется сверхпроводимость в диапазоне $0,06 < x < 0,25$ с T_C , зависящей от x . При этом максимальное значение $T_C^{\max} \approx 37$ К (рис. 5.7).

Однако основная заслуга Беднорца и Мюллера не только в том, что они увеличили T_C почти в 2 раза по сравнению с предшественниками, а в том, что был указан новый путь развития. Действительно, очень быстро были получены другие структурно и кристаллически схожие сверхпроводящие купраты с $T_C \geq 100$ К. Среди них $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ ($T_C^{\max} = 96$ К), $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$ ($T_C = 115$). Наибольшая критическая температура достигнута в ртутных купратах $T_C = 155$ К (под давлением возрастает до 164 К). Хотя до комнатной температуры поднять T_C пока не удалось, в сверхпроводящих купратах преодолен важный барьер температуры кипения жидкого азота (77 К). То есть эти материалы можно охлаждать азотом, а не гелием, что важно для практики. Поэтому к сверхпроводящим купратам применяется термин высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП).

Со структурной точки зрения все ВТСП купраты однотипны. Они состоят из чередующихся вдоль оси z металлических и диэлектрических слоев. Металлические слои всегда содержат n плоскостей CuO_2 ($n=1$ для $La_{2-x}Sr_xCuO_4$, $n=2$ для $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$), диэлектрические слои играют роль резервуара заряда. Физическая природа ВТСП до конца не ясна. Помимо фононного механизма БКШ, было предложено много других возможных вариантов. Вместо обмена фононами – переносчиками взаимодействия в теории БКШ, воз-

можен обмен другими бозевскими возбуждениями в кристалле: плазмонами, экситонами, магнонами и т.п., а также их всевозможные сочетания.

Экспериментальные исследования ВТСП купратов выявили, что фазовая диаграмма $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ является типичной для всех купратов. Более того, зависимость T_C от концентрации носителей в CuO_2 слое в безразмерных переменных практически для всех купратов совпадает с зависимостью $T_C(x)$ в $La_{2-x}Sr_xCuO_4$. Поэтому рассмотрим подробнее фазовую диаграмму на рис. 5.7.

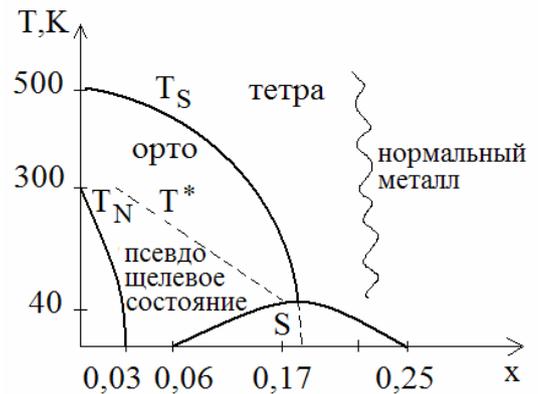


Рис. 5.7. Фазовая диаграмма $La_{2-x}Sr_xCuO_4$.

Исходный купрат La_2CuO_4 является диэлектриком. Из электронейтральности $La_2^{3+}Cu^{2+}O_4^{2-}$ следует, что Cu^{2+} ион в конфигурации d^9 имеет одну дырку (то есть не хватает одного d -электрона для полного заполнения d^{10} оболочки), имеет спин $S = 1/2$. Магнитные моменты Cu^{2+} упорядочены антиферромагнитно с $T_N = 300$ К, причем чередование подрешеток имеет место как в CuO_2 слое, так и поперек слоев (шахматное упорядочение). Замещение каждого La^{3+} на Sr^{2+} (допирование) порождает дополнительную дырку, концентрация которых на формульную единицу $n_h = 1 + x$. Одна дырка локализована на Cu^{2+} , а x дырок становятся носителями тока. Дальний магнитный порядок быстро разрушается, и $T_N = 0$ при $x > 0,03$. Однако ближний антиферромагнитный порядок в CuO_2 плоскостях существует вплоть до концентраций оптимального допирования $x_{opt} \approx 0,17$ и до температур T (температура образования псевдощелевого состояния). Электрические свойства резко анизотропны. Первые носители тока уже при $x=0,03$ приводят к формированию дырочных карманов в окрестности волнового вектора $\vec{k} = (\pi/2, \pi/2)$ зоны Бриллюэна. Сверхпроводимость возникает на фоне сильных магнитных флуктуаций, концентрация оптимального допирования соответствует максимуму T_C . Левее x_{opt} находится область слабодопированных, правее – сильнодопированных составов. Кроме того, в $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ имеет место и структурный фазовый переход тетрагональная фаза – орторомбическая линия $T_S(x)$ начинается выше 500 К для $x=0$ и пересекается с $T_S(x)$ в окрестности оптимального допирования.

Таким образом, близость S состояния к магнитному, структурному переходам и переходу металл-диэлектрик определяет сложность и взаимосвязанность всех подсистем кристалла – электронной, структурной и магнитной.

В обычных низкотемпературных сверхпроводниках, описываемых теорией БКШ, ничего этого нет, в них N - S переход затрагивает только электронную систему.

Имеется и вторая, более фундаментальная проблема, затрудняющая понимание природы ВТСП. Дело в том, что традиционный подход в квантовой теории твердого тела – одноэлектронное приближение, предполагающее, что истинное парное кулоновское взаимодействие может быть заменено неким эффективным потенциалом, действующим на данный электрон. В этом случае полная многоэлектронная волновая функция может быть представлена в виде произведения одноэлектронных функций. Наиболее развитая вычислительная схема одноэлектронного подхода, зонная теория в приближении локального функционала плотности LDA, достигла больших успехов в описании электронных свойств металлов и сплавов. Однако LDA расчет зонной структуры La_2CuO_4 приводит к металлическому состоянию в противоречии наблюдаемым электрическим.

В настоящее время ясно, что причина противоречия в неприменимости одночастичного приближения. Остаток кулоновской потенциальной энергии после вычета одночастичных эффективных потенциалов называется корреляционной энергией. Успех зонной теории в металлах обязан тем, что корреляционная энергия в них мала. Однако в ВТСП купратах наоборот, корреляционная энергия велика по сравнению с одночастичной. Таким образом, возникает проблема сильных электронных корреляций, общего решения которой в настоящее время нет. С ростом допирования роль сильных электронных корреляций ослабляется, и в области сильнодопированных составов применимы одночастичный подход и зонная теория.

Наличие ближнего магнитного порядка с большим корреляционным радиусом $\xi_{AFM} \geq 10$ нм в области слабого допирования, где и зарождается сверхпроводимость из антиферромагнитного диэлектрика, наводит на мысль о возможном магнитном механизме сверхпроводимости. На рис. 5.8 показано эффективное взаимодействие между электронами, возникающее за счет испускания и поглощения виртуального антиферромагнитного магнона.

$$V(\vec{r}) = \sum_{\vec{q}} v(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

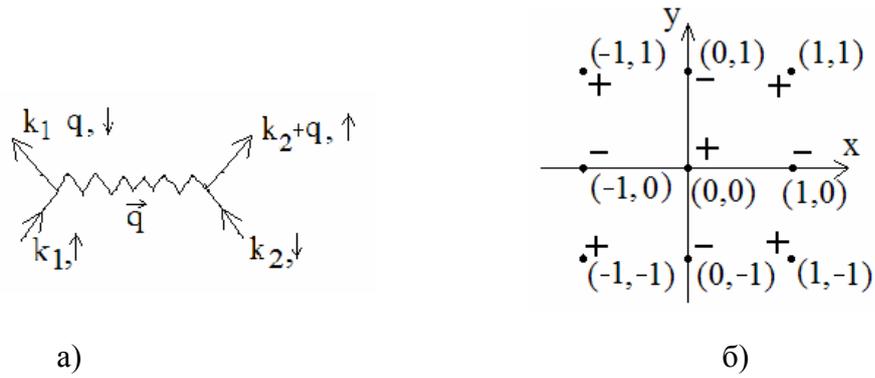


Рис. 5.8. Эффективное взаимодействие между электронами за счет обмена магнотом в импульсном (а) и координатном (б) пространстве для квадратной решетки.

Потенциал взаимодействия $V_{e-m-e}(\vec{q})$ для двух электронов с суммарным спином $S=0$ (именно такие куперовские пары обнаружены экспериментально в ВТСП купратах) оказывается отталкивательным, $V(\vec{q}) > 0$. Однако специфика квадратной решетки CuO_2 слоя приводит к тому, что фурье-образ взаимодействия, $V_{e-m-e}(\vec{r})$, имеет разные знаки в разных точках решетки. Несмотря на интегральное отталкивание, в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$ и т.п. имеется притяжение. Такой анизотропный характер взаимодействия благоприятен для анизотропной зависимости сверхпроводящего параметра порядка $\Delta(\vec{k}) = \Delta_0(\cos k_x a - \cos k_y a)/2$ (спаривание $d_{x^2-y^2}$ симметрии с орбитальными моментами пары $l = 2$). Напомним, что в теории БКШ Δ не зависит от k (изотропное S -спаривание). Экспериментальное подтверждение $d_{x^2-y^2}$ симметрии значительно укрепило позиции сторонников магнитного механизма ВТСП.

В то же время ясно, что один магнитный механизм не в состоянии полностью описать ВТСП, в частности, изотоп-эффект (сдвиг T_c при изменении массы иона в разных изотопах) указывает на фононный механизм. Магнитный и фононный механизм в настоящее время наиболее часто обсуждаются в литературе, причем, налицо две противоположные точки зрения: одни авторы считают, что доминирует фононный, а другие – магнитный. Конечно же, рассматриваются и другие более экзотические механизмы. Теория ВТСП развивается в СФУ и ИФ СО РАН им. Л.В. Киренского группами под руководством В.В. Валькова и С.Г. Овчинникова с учетом сильных электронных корреляций [7]. На рис. 5.9 показана зависимость $T_c(x)$, найденная при одновременном учете магнитного (J) и фононного (G) механизмов [24]. Как оказалось, фононный и магнитный вклады одного порядка. Поэтому, возможно, что объединение этих двух механизмов позволяет продвинуться дальше в понимании природы ВТСП купратов.

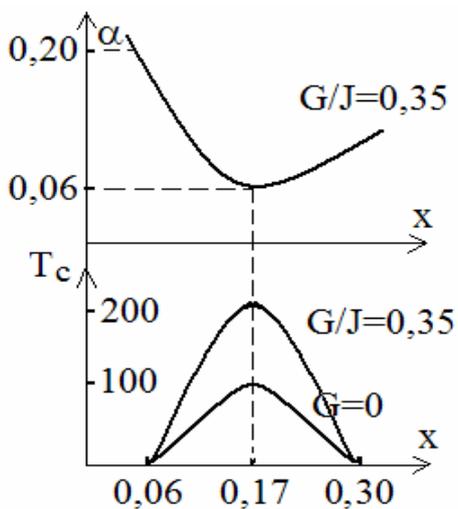


Рис. 5.9. Концентрационная зависимость показателя изотоп-эффекта и критической температуры $T_c(x)$ для $La_{2-x}Sr_xCuO_4$, рассчитанная при учете только магнитного ($G=0$) и одновременно магнитного и фоновнного ($G/J=0,35$) вкладов.

В заключение этого параграфа укажем, что идея достичь $T_c \sim 300$ К (комнатотемпературная сверхпроводимость) не оставлена. Активно продолжается экспериментальный поиск

новых ВТСП материалов. Из достижений последних лет стоит упомянуть MgB_2 ($T_c \approx 40$ К) и появившуюся в 2008 г. систему $La_2O_{2-x}F_xFe_2As_2$ с $T_c \approx 55$ К. Прикладной потенциал устройств на ВТСП огромен. Это и сильноточная электроника (линии электропередач, сильные электромагниты для энергетики, транспорта, медицины и др.), и микроэлектроника.

Контрольные вопросы

1. Какая симметрия нарушена в магнитоупорядоченных веществах?
2. Для каких магнитных моментов магнитная восприимчивость описывается законом Кюри?
3. Какой вклад в энергию ферромагнетика определяет направление намагниченности?
4. Запишите уравнение, описывающее динамику намагниченности в ферромагнетике.
5. Запишите закон дисперсии магнонов в ферромагнетике.
6. Чем антиферромагнетик отличается от ферромагнетика?
7. Почему сверхпроводник можно назвать также сверхдиамагнетиком?
8. В каком веществе сверхпроводимость существует при комнатной температуре?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Ландау Л.Д. *Теория поля* / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц – М.: ФИЗМАЛИТ, 2001. – 536 с.
2. Ландау Л.Д. *Электродинамика сплошных сред* / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц – М.: ФИЗМАЛИТ, 2001. – 626 с.
3. Бредов М.М. *Классическая электродинамика* / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин – М.: Наука, 1985.
4. Памятных Е.А. *Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях* / Е.А.Памятных, Е.А.Туров – М.: Наука, 2000; см. также: Туров Е.А. *Материальные уравнения электродинамики* / Е.А.Туров – М.: Наука, 1983.
5. Батыгин В.В. *Сборник задач по электродинамике* / В.В.Батыгин, И.Н.Топтыгин – М.: Наука, 1970.
6. Алексеев А.И. *Сборник задач по классической электродинамике* / А.И.Алексеев – М.: Наука, 1977.

Дополнительная

7. Вальков В.В. *Квазичастицы в сильно коррелированных системах* / В.В.Вальков, С.Г.Овчинников – Новосибирск: Изд-во СОРАН, 2001.
8. Зиненко В.И. *Основы физики твердого тела* / В.И. Зиненко, Б.П. Сорокин, П.П. Турчин. – М.: Физматгиз, 2001.
9. Баранов А.М. *Основы теории относительности и гравитации: математическое введение: Учеб. пособие* / А.М.Баранов // Краснояр. гос. ун-т. Красноярск, 1987. - 91 с.
10. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* / Л.А.Вайнштейн – М.: Радио и связь, 1988.
11. Джексон Дж. *Классическая электродинамика* / Дж.Джексон – М.: Мир, 1965.
12. Пановский В. *Классическая электродинамика* / В.Пановский, М.Филипс – М.: Физматгиз, 1963.
13. Савельев И.В. *Основы теоретической физики. Т. 1. Механика. Электродинамика* / И.В.Савельев – М.: Наука, 1975.

14. Тамм И.Е. *Основы теории электричества* / И.Е.Тамм – М.: Наука, 1989.
15. Терлецкий Я.П. *Электродинамика* / Я.П.Терлецкий, Ю.П.Рыбаков – М.: Высшая школа, 1990.
16. Фейнман Р. *Фейнмановские лекции по физике. Т.5 Электричество и магнетизм* / Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. – М.: Мир, 1977.
17. Фейнман Р. *Фейнмановские лекции по физике. Т.6 Электродинамика; т.7 Физика сплошных сред* / Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. – М.: Мир, 1977.
18. Фейнман Р. *Фейнмановские лекции по физике. Т.7 Физика сплошных сред* / Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. – М.: Мир, 1977.
19. Богуш А.А. *Введение в теорию классических полей* / А.А.Богуш, Л.Г.Мороз – Минск: Наука и техника, 1968.
20. Браут Р. *Фазовые переходы* / Р.Браут – М.: Мир, 1967.
21. Киттель Ч. *Введение в физику твердого тела* / Ч.Киттель – М.: Наука, 1978.
22. Баранов А.М *Алгебраическая классификация бивектора в плоском пространстве Калуцы и магнитный заряд* / А.М.Баранов //Изв.вуз.(Физика).– 1997.– №1. –С. 114-119.
23. Френкель Я.И. *Электродинамика Т.2* / Я.И.Френкель – Л.-М.: ОНТИ, 1935
24. Овчинников С.Г. *Труды международной научной конференции «Фундаментальные проблемы сверхпроводимости»* / С.Г. Овчинников, Е.И.Шнейдер, Москва, 13-17октября 2008.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- 4-вектор плотности тока, 31
- 4-потенциал, 27
- 4-х тензор поляризации, 102

- Альфеновские волны, 144
- Антиферромагнетик, 173

- Вектор Умова-Пойнтинга, 68, 101
- Вихри Абрикосов, 184
- Волновой вектор, 69
- Высокотемпературная сверхпроводимость, 186

- Глубина проникновения, 185
- Гравитационный заряд, 7

- Диамagnetизм, 173
- Дипольный момент, 44
- Диэлектрическая проницаемость ϵ , 115
- Длина волны, 69
- Доменная структура, 179

- Закон
 - Кулона, 39
 - Кюри-Вейсса, 181
 - Ома, 120, 137
 - сохранения тензора энергии-импульса, 36
- Запаздывающие потенциалы, 79

- Излучение
 - дипольное, 87
 - квадрупольное, 87
 - магнито-дипольное, 87

- Калибровочная инвариантность, 15
- Куперовские пары, 183, 190

- Магнитная
 - анизотропия, 178
 - восприимчивость χ , 130
 - вязкость, 140
 - гидродинамика, 137
 - индукция \vec{B} , 97, 100
 - проницаемость μ , 129
 - проницаемость μ , 98
 - симметрия, 172
- Магнитное число Рейнольдса, 140
- Магнитный момент, 59, 61
- Магнитозвуковые волны, 144
- Мультипольный момент, 49

- Намагниченность \vec{M} , 128
- Напряженность
 - магнитного поля, 12
 - электрического поля, 12

- Обменная энергия, 176, 177

- Парамагнетизм, 173
- Плоские волны, 66, 94
- Плотность
 - заряда, 30
 - импульса, 68
 - функции Лагранжа, 27
 - энергии, 68
- Поляризационный ток, 100
- Поляризация волны, 70
- Потенциалы Лиенара-Вихерта, 80
- Поток магнитного поля, 33
- Преобразования Лоренца, 11
- Принцип суперпозиции, 28
- Пробный
 - гравитационный заряд, 7
 - электрический заряд, 7
- Проводимости ток

Промежуточная фаза Шубникова, 184
 Размагничивающее магнитостатическое поле, 178
 Рассеяние, 89
 Сверхпроводимость, 181, 183
 Свойство суперпозиции, 28
 Сильные электронные корреляции, 188
 Символ
 Кристоффеля, 23
 Леви-Чивиты, 20
 Смещения ток, 64
 Смещения ток
 Спиновые волны, 178
 Сферические волны, 72
 Тензор диэлектрической проницаемости, 117
 Теория Бардина-Купера-Шриффера, 183
 Уравнение
 Д'Аламбера, 77
 Ландау-Лифшица, 178
 Лондонов, 184
 Навье-Стокса, 138
 непрерывности, 32
 Уравнения
 Гамильтона-Якоби, 13
 Лоренца, 22
 Ферримагнетик, 173
 Ферромагнетик, 173
 Функция Гамильтона, 13
 Циркуляционный ток, 100
 Частота Ламорова, 63
 Электрическая
 индукция \vec{D} , 97, 114
 поляризация \vec{P} , 97
 проводимость σ , 98
 Электрический заряд, 7
 Электростатическое поле, 38
 Эффект Мейсснера, 186
 Эффективное сечение рассеяния, 89

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ЧАСТЬ I. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ВАКУУМЕ	6
Глава 1. Электрический заряд и электромагнитное поле	6
1.1. Понятие силового поля и пробного заряда	6
1.2. Действие для заряда в электромагнитном поле и четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля	7
1.3. Уравнения движения точечного заряда в электромагнитном поле	12
1.4. Калибровочная или градиентная инвариантность электромагнитного поля	14
1.5. Постоянное электромагнитное поле	16
1.6. Движение в постоянных электрическом и магнитном полях	17
1.7. Дуальное сопряжение и 4-мерный символ Леви-Чивиты	20
1.8. Ковариантная форма уравнений движения	22
1.9. Тензор электромагнитного поля	23
1.10. Преобразование Лоренца для электромагнитного поля	23
1.11. Инварианты электромагнитного поля	24
Контрольные вопросы	26
Глава 2. Уравнения электромагнитного поля	27
2.1. Уравнения Лагранжа для непрерывных систем	27
2.2. Действие для электромагнитного поля	28
2.3. Четырехмерный вектор тока и уравнение непрерывности	30
2.4. Уравнения Максвелла в 3-мерной и 4-мерной формах записи	32
2.6. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля	36
Контрольные вопросы	37
Глава 3. Статические электрические и магнитные поля	38
3.1. Постоянное электрическое поле	38
3.3. Поле равномерно движущегося заряда	40
3.4. Дипольный и мультипольный моменты	44
3.5. Система зарядов во внешнем поле	51
3.6. Постоянное магнитное поле	54
3.7. Магнитный момент	56
3.8. Теорема Лармора	60
Контрольные вопросы	64
Глава 4. Электромагнитные волны	64
4.1 Волновое уравнение	64
4.2 Плоские волны	66
4.3 Монохроматическая плоская волна	69
4.4 Сферические волны	71
4.5 Общее решение неоднородного волнового уравнения	72
Контрольные вопросы	74

Глава 5. Электромагнитные поля движущихся зарядов	75
5.1. Запаздывающие потенциалы	75
5.2. Потенциалы Лиенара-Вихерта	79
Контрольные вопросы	82
Глава 6. Теория излучения	83
6.1. Поле системы зарядов на далеких расстояниях.....	83
6.2. Дипольное излучение	84
6.3. Квадрупольное и магнито-дипольное излучения.....	85
6.4. Излучение быстро движущегося заряда	87
6.5. Рассеяние свободными зарядами	89
Контрольные вопросы	91
Глава 7. Спектральные представления электромагнитного поля.....	91
7.1. Собственные колебания поля	91
7.2. Спектральное разложение электростатического поля.....	93
7.3. Спектральное представление запаздывающих потенциалов.....	94
Контрольные вопросы	95
ЧАСТЬ II. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД.....	97
Глава 1. Макроскопические уравнения Максвелла.....	97
1.1. Уравнения Максвелла для сплошных сред	97
1.2. Вывод макроскопических уравнений Максвелла из микроскопических	98
1.3. Макроскопические уравнения Максвелла в релятивистском виде ...	101
Контрольные вопросы	103
Глава 2. Статические поля в различных средах	104
2.1. Электростатика проводников	104
2.1. Методы решения электростатических задач.....	106
2.2. Электростатика диэлектриков	113
2.3. Свойства изотропных диэлектриков в статическом поле.....	114
2.4. Свойства анизотропных диэлектриков.....	117
2.5. Постоянный ток.....	120
2.6. Эффект Холла.....	124
2.7. Статическое магнитное поле в сплошной среде.....	127
2.8. Самоиндукция и взаимоиנדукция.....	132
Контрольные вопросы	136
Глава 3. Магнитная гидродинамика.....	137
3.1. Основные уравнения магнитной гидродинамики	137
3.2. Эффект увлечения магнитного потока хорошо проводящей жидкостью. Магнитная вязкость	139
3.3. Магнитогидродинамические волны.....	141
Контрольные вопросы	144
Глава 4. Электромагнитные волны в сплошной среде.....	145
4.1. Низкочастотное поле в диэлектриках	145
4.2. Переменное поле в диэлектриках с учетом эффектов запаздывания.....	146

4.3 Дисперсия диэлектрической проницаемости. Соотношения Крамерса-Кронига.	148
4.6 Переменное поле в металлах. Плазменные колебания	156
4.7 Скин-эффект	157
4.8 Резонаторы и волноводы	159
4.9 Волны в анизотропных средах	162
4.10 Флуктуации, флуктуационно-диссипационная теорема.....	164
Контрольные вопросы	170
Глава 5. Магнитные свойства конденсированных сред.....	172
5.1. Магнитная симметрия конденсированных сред	172
5.2. Диамагнетизм и парамагнетизм	173
5.3. Ферромагнетизм.....	176
5.4. Основные свойства сверхпроводников.....	181
5.5. Высокотемпературная сверхпроводимость.....	186
Контрольные вопросы	190
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	191
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	193

«Теоретическая физика: Электродинамика. Электродинамика сплошных сред.» Учебное пособие по курсу «Электродинамика и основы электродинамики сплошных сред»

Баранов Александр Михайлович
Овчинников Сергей Геннадьевич
Золотов Олег Александрович
Паклин Николай Николаевич
Титов Леонид Сергеевич

Редактор

Корректор

Лицензия ЛРН№ 020372 от 22.01.92

Подписано в печать

Формат

Бумага тип. Усл.печ. Уч.-изд.л.

Тираж

Заказ

Редакционно-издательский центр
Сибирский федеральный университет

660041 Красноярск, пр.Свободный, 79